

Emelt szintű gyakorló feladatsor

I. rész

1. Adott a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény:

$$f(x) = (2x - 1)^2 + (x - 4)(x + 4) - 5x(x - 1),$$

$$g(x) = x^3 - 4|x|.$$

- a) Igazoljuk, hogy f elsőfokú függvény.

- b) Adjuk meg a g függvény zérushelyeit.

(11 pont)

2. Egy szabályos hatszög oldalai és átlói közül ötöt pirosra, a többiit zöldre festettük. Ezek után véletlenszerűen választunk közülük öt szakaszt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan három piros és kettő zöld lesz a kiválasztottak között?

(13 pont)

3. Az ABC egy szabályos háromszög. Az A középpontú AB sugarú kör kisebbik BC ívének B -hez közelebbi harmadolópontja D , C -hez közelebbi harmadolópontja pedig E . A B középpontú AB sugarú kör kisebbik AC ívének felezőpontja F . Mekkora az AD , AE és BF egyenesek által meghatározott háromszög belső szögei?

(13 pont)

4. Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(1; 1)$, $B(6; 2)$ és $C(2; 6)$.

- a) Milyen hosszú a háromszög legrövidebb magassága?

- b) Mekkora a háromszög területe?

- c) Egyszerre dobunk egy piros és egy zöld dobókockával. A pirossal dobott szám legyen egy pont első, a zölddel dobott szám a második koordinátája. Mekkora valószínűséggel lesz az így kapott pont az ABC háromszög belsejében?

(14 pont)

II. rész

5. Egy érettségi találkozón Lászlótól 2012-ben megkérdezték tanítványai, hogy hány éves. Ezt válaszolta:

„Édesanyám születési évszáma $\overline{abcd}$, az én születési évszámom pedig $\overline{ab}^2 + \overline{cd}^2$, ekkor ő 21 éves volt. Nem egy városban élünk, a következő héten utazom hozzá.”

Hány éves László 2012-ben?

(16 pont)

6. Tekintsük az $\{a_n\} = \left\{ \frac{2n+12}{n+3} \right\}$ sorozatot ($n \in \mathbb{N}^+$).

- a) Határozzuk meg a sorozat összes olyan tagját, amelyek 3-nál nem kisebbek.

- b) Az a_1 , a_3 , a_9 sorszámúak egy mértani sorozat három egymást követő tagját adják. Igazoljuk, hogy a sorozat ezen három eleme egy számtani sorozatnak a három egymást követő tagja lesz.

- c) Hány olyan tagja van a sorozatnak, amelyek három tizedes jegyre kerekített értéke 2,012?

- d) Határozzuk meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ értékét.

(16 pont)

7. Az $ABCDEFGH$ téglatestben úgy jelöltük a csúcsokat, hogy az $ABCD$ alaplappal egybevágó lapon az E csúcsot az A -val, a F csúcsot a B -vel, a G csúcsot a C -vel, a H csúcsot a D -vel kösse össze él. Tudjuk, hogy a BAF szög 45° -os, a CAG szög pedig 30° -os.

- a) Igazoljuk, hogy $AFGD$ négyzet.

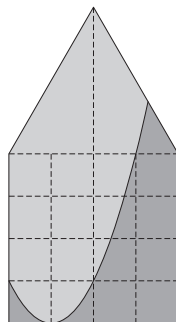
- b) Mekkora az $AFBC$ tetraéder felszíne, ha $AB = a$?

- c) Mekkora az $AFHC$ tetraéder térfogata, ha AF és HC távolsága $a\sqrt{2}$?

(16 pont)

8. Egy ház tőzfala egy négyzetből és egy szabályos háromszögből áll. A falat két színnel szeretnék vakolni. A két rész között a határvonal egy parabola lesz, amit a mellékelt *ábra* mutat. A házikó parabola feletti részét világosabbra, a többiit sötétebbre vakolják. A felület hány százaléka lesz sötétebb árnyalatú?

(16 pont)



9. Határozzuk meg azokat az x valós számokat, amelyre $\cos x$ és $\cos 2x$ négyzetösszege a $\cos 3x$ négyzetével egyenlő.
(16 pont)

Számadó László