

Megoldásvázlatok a 2012/4. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. Egy számtani sorozat differenciája 56, n -edik eleme 2012. A sorozat első n elemének összege 32 000. Határozzuk meg a sorozat első elemét. (12 pont)

Megoldás. A számtani sorozat n -edik eleme: $2012 = a_1 + (n - 1) \cdot 56$, ebből pedig $a_1 = 2068 - 56n$. A számtani sorozat első n elemének összege:

$$\begin{aligned} 32\,000 &= \frac{[2a_1 + (n - 1) \cdot 56] \cdot n}{2} = \frac{[2 \cdot (2068 - 56n) + (n - 1) \cdot 56] \cdot n}{2} = \\ &= \frac{(4080 - 56n) \cdot n}{2} = (2040 - 28n) \cdot n, \end{aligned}$$

ezt pedig nullára rendezve és 4-gyel osztva:

$$7n^2 - 510n + 8000 = 0.$$

A másodfokú egyenlet egyik gyöke nem egész, tehát nem megoldása a feladatnak, a másik gyöke: $n = 50$. A sorozat első eleme tehát

$$a_1 = 2068 - 56n = 2068 - 56 \cdot 50 = -732.$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ez valóban megoldása a feladatnak.

2. Egy közpark olyan egyenlő szárú háromszög alakú, melynek szárai 40 métereseek, a szárak által bezárt szög pedig 50° -os. A szárak találkozásától egy 35 méter sugarú körívet húznak. A köríven belüli részt füvesítik, a köríven kívüli részt pedig virágokkal ültetik be.

a) Határozzuk meg a beültetéshez szükséges virágtövek számát, ha egy négyzetméterre 30 fő virágot számolnak.

b) A park kerületén körben és a körívnek a park belsejébe eső részére ösvényeket terveznek. Határozzuk meg az építendő ösvények teljes hosszúságát (a számítások során az ösvények szélességét elhanyagolhatjuk). (13 pont)

Megoldás. a) A körív teljes egészében a park belsejében húzódik, hiszen az egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága

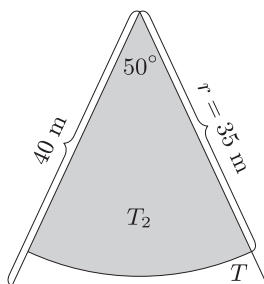
$$40 \cdot \cos 25^\circ \approx 36,25 \text{ m} > 35 \text{ m}.$$

A beültetendő terület az egyenlő szárú háromszög területének (T_1) és a körív által létrehozott körcikk területének (T_2) különbsége.

$$T_1 = \frac{40 \cdot 40 \cdot \sin 50^\circ}{2} \approx 612,84 \text{ m}^2,$$

$$T_2 = \frac{50^\circ}{360^\circ} \cdot 35^2 \cdot \pi \approx 534,51 \text{ m}^2,$$

$$T = T_1 - T_2 \approx 78,33 \text{ m}^2.$$



A beültetéshez szükséges virágtövek száma a négyzetméterben mért alapterület 30-szorosa, tehát kb. 2350.

b) Az egyenlő szárú háromszög alapjának hossza $2 \cdot 40 \cdot \sin 25^\circ \approx 33,81$ m. A körív hossza

$$\frac{50^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 35 \cdot \pi \approx 30,54 \text{ m}.$$

A megépítendő ösvények teljes hosszúsága tehát kb. $40 + 40 + 33,81 + 30,54 \approx 144$ m.

3. Hány olyan nem izomorf, egyszerű gráf van, melynek pontjainak fokszámsorozata

- a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;
- b) 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5;
- c) 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6;
- d) 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6;
- e) 2; 3; 3; 4; 4; 4?

Amelyik esetben nem létezik ilyen gráf, indokoljuk is meg, hogy miért nem. (14 pont)

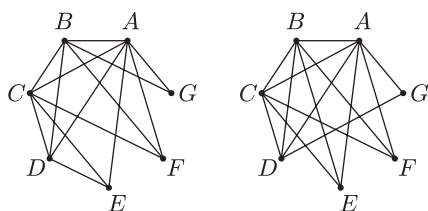
Megoldás. a) Nincs ilyen gráf, mert bármely egyszerű gráfban kell lennie két azonos fokszámú pontnak.

b) Nincs ilyen gráf, mert bármely gráf pontjainak fokszámösszege páros.

c) A 6 fokszámú csúcsot jelölje A , az 5 fokszámúakat B és C , a 4 fokszámút D , a 3 fokszámúakat E és F , végül a 2 fokszámút G .

Az A csúcs biztosan össze van kötve az összes többivel. Ha B és C egymással nem lenne összekötve, akkor mindkettő össze lenne kötve G -vel, amelyből így már három él indulna ki, ez tehát nem lehetséges, a két 5 fokszámú csúcs össze van kötve egymással.

Ha B és C valamelyike, például B nincs összekötve D -vel, akkor viszont össze van kötve a maradék három csúccsal: E -vel, F -fel és G -vel. Ekkor D -ből indulnia kell élnek C -be, E -be és F -be is, viszont C -ből két él még hiányozna, tehát ez sem lehetséges, azaz B és C is össze van kötve D -vel.

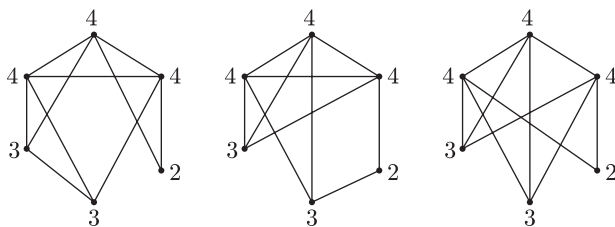


Ezután B -ből, C -ből és D -ből még összesen 5 élnek kell indulnia E -be, F -be és G -be, ami kétféleképpen valósítható meg aszerint, hogy a D -ből hiányzó egyetlen él másik végpontja egy 3 fokszámú vagy a 2 fokszámú csúcs.

Tehát két, a feltételeknek megfelelő nem izomorf, egyszerű gráf van.

d) Nincs ilyen gráf. A három 6 fokszámú csúcs össze van kötve az összes többivel, de így a 3 fokszámúakból már nem is indulhat több él. Az 5 fokszámúakból pedig két élnek még kellene indulnia, egyszerű gráfokban azonban nincs hurokél.

e) Ha a 4 fokszámú csúcsok közt mind a három lehetséges él be van húzva, akkor belőlük összesen még 6 élnek kell a másik három csúcs felé indulni, melyek fokszámösszege 8. Ez azt jelenti, hogy a másik három csúcs között összesen egy él van behúzva. Így két különböző gráfot kapunk aszerint, hogy ez az él a két 3 fokszámú csúcs közt húzódik vagy sem.



Ha a 4 fokszámú csúcsok közt két lehetséges él be van húzva, egy pedig nincs, akkor belőlük összesen még 8 élnek kell a másik három csúcs felé indulni, melyek fokszámösszege éppen 8, köztük tehát további élek ebben az esetben nincsenek. A gráf már egyértelműen meghatározott, hiszen az a két 4 fokszámú csúcs, melyek közt hiányzik az él, mindhárom további ponttal össze lesz kötve, a harmadik 4 fokszámú pedig csak a két 3 fokszámúval.

Tehát összesen három, a feltételeknek megfelelő nem izomorf, egyszerű gráf van.

4. Téglalap alakú földdarabot szeretnénk felmérni. Ehhez a téglalap egyik oldalának belsejében felvesszük az egymástól 50 méterre található A és B pontokat. A téglalapnak e két pontot tartalmazó oldalával szemközti csúcsait jelölje C és D . Megmérjük a következő szögeket: CAB szög 113° -os, DAB szög 48° -os, CBA szög 54° -os. Mekkora a földdarab területe? (12 pont)

Megoldás. A téglalap AB szakaszt tartalmazó oldalának két végpontját jelölje E és F az ábra szerint. Az ABC háromszögben szinusztétellel meghatározható az AC oldal hossza:

$$AC = AB \cdot \frac{\sin 54^\circ}{\sin(180^\circ - 54^\circ - 113^\circ)} = 50 \cdot \frac{\sin 54^\circ}{\sin 13^\circ} \approx 179,8 \text{ m.}$$

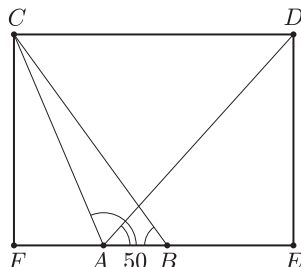
Ezt felhasználva az ACF háromszögben:

$$CF = AC \cdot \sin 67^\circ \approx 165,5 \text{ m,}$$

$$FA = AC \cdot \cos 67^\circ \approx 70,3 \text{ m.}$$

Az AED háromszögben:

$$AE = \frac{DE}{\operatorname{tg} 48^\circ} = \frac{CF}{\operatorname{tg} 48^\circ} \approx 149,0 \text{ m.}$$



Így a földdarab területe:

$$T = CF \cdot FE = CF \cdot (FA + AE) = 165,5 \cdot 219,3 \approx 36\,294 \text{ m}^2.$$

II. rész

5. Dani teniszezik. Egy versenyen első adogatásainak 63%-át ütötte érvényes területre. Ha érvényes területre ment az első adogatás, akkor a labdamentek 90%-át megnyerte. Ha nem ment érvényes területre, akkor egy másodikat adogathatott. Ezeknek 85%-át ütötte érvényes területre. Amikor a második adogatás érvényes területre ment, akkor a labdamentek 60%-át nyerte meg. Ha egyik adogatását sem ütötte érvényes területre, akkor Dani elveszítette a labdamentet.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy Dani elveszített egy labdamentet, amikor ő adogathatott?

b) Mekkora a valószínűsége, hogy Dani első adogatása már érvényes területre ment, ha tudjuk, hogy az adott labdamentet elveszítette? (16 pont)

Megoldás. a) Jelölje A azt az eseményt, hogy Dani megnyer egy labdamentet, B_1 azt az eseményt, hogy az első adogatása sikeres, B_2 azt az eseményt, hogy a második adogatása sikeres.

Annak a valószínűsége, hogy Dani az első adogatásából nyerte meg a pontot:

$$P(A | B_1) \cdot P(B_1) = 0,9 \cdot 0,63 = 0,567.$$

Második adogatásra csak a labdamentek 37%-ában kerül sor, amikor az első adogatása sikertelen volt. Annak a valószínűsége, hogy második adogatásából nyerte meg a pontot:

$$P(A | B_2) \cdot P(B_2) \cdot P(\overline{B_1}) = 0,6 \cdot 0,85 \cdot 0,37 = 0,1887.$$

Annak a valószínűsége, hogy Dani nyerte a pontot, az előző két érték összege, tehát $P(A) = 0,7557$, annak a valószínűsége pedig, hogy Dani elvesztette a labdamentet,

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,2443.$$

b) A kérdés a $P(B_1 | \overline{A})$ valószínűség. A feltételes valószínűség definíciója szerint:

$$P(B_1 | \overline{A}) = \frac{P(B_1 \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(\overline{A} | B_1) \cdot P(B_1)}{P(\overline{A})} = \frac{0,1 \cdot 0,63}{0,2443} \approx 0,258.$$

6. a) Határozzuk meg $\frac{x}{y}$ értékét három tizedesjegy pontossággal, ha tudjuk, hogy $2^x = 5^y$, ahol x és y nullától különböző valós számok.

b) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok lehető legbővebb részhalmazán:

$$\frac{5}{2} \sqrt{\lg x} + 2 \lg \sqrt{\frac{1}{x}} - 1 < 0. \quad (16 \text{ pont})$$

Megoldás. a) Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát és alkalmazzuk a logaritmus ismert azonosságait:

$$\begin{aligned}\lg 2^x &= \lg 5^y, \\ x \lg 2 &= y \lg 5.\end{aligned}$$

Keresztbe osztva kapjuk:

$$\frac{x}{y} = \frac{\lg 5}{\lg 2} \approx 2,322.$$

b) Először megállapítjuk az egyenlőtlenség értelmezési tartományát.

A logaritmus függvény értelmezési tartománya miatt $x > 0$, valamint $\sqrt{\frac{1}{x}} > 0$, amiből szintén $x > 0$ következik.

A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt $\lg x \geq 0$, amiből $x \geq 1$, valamint $\frac{1}{x} > 0$, amiből ismét $x > 0$ következik. Összegezve mindezt az egyenlőtlenség értelmezési tartománya $x \geq 1$.

A bal oldalon álló kifejezés középső tagját a hatványozás és a logaritmus azonosságainak felhasználásával átalakítjuk:

$$2 \lg \sqrt{\frac{1}{x}} = 2 \lg x^{-\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \lg x = -\lg x.$$

Az $a = \sqrt{\lg x}$ (nemnegatív) új ismeretlen bevezetésével az egyenlőtlenség ezután így alakul: $-a^2 + 2,5a - 1 < 0$. A megfelelő egyenlet megoldásai $a = 2$ és $a = 0,5$, a negatív főegyütthatóra tekintettel az egyenlőtlenség megoldása ezért $a < 0,5$, vagy $a > 2$.

Figyelembe véve, hogy a nemnegatív, megoldandóak a $0 \leq \sqrt{\lg x} < 0,5$ és a $\sqrt{\lg x} > 2$ egyenlőtlenségek. Ezeket négyzetre emelve adódik $0 \leq \lg x < 0,25$, illetve $\lg x > 4$. Ezekből kapjuk, hogy

$$1 \leq x < \sqrt[4]{10} \ (\approx 1,778), \quad \text{illetve} \quad x > 10\,000.$$

Átalakításaink ekvivalensek voltak.

7. Az $f(x) = 2 \sin x$ függvény grafikonja és az x tengely által a $[0; \pi]$ intervallumon közrezárt síkidomot a $g(x) = 2 \cos x$ függvény görbéje két síkidomra bontja. Határozzuk meg a két síkidom területének arányát. (16 pont)

Megoldás. A teljes síkidom területét az f 0 és π közötti integráljaként határozhatjuk meg:

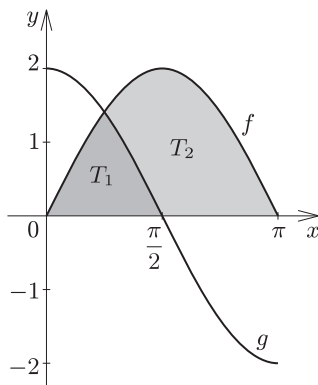
$$T = \int_0^{\pi} 2 \sin x \, dx = [-2 \cos x]_0^{\pi} = -(-2) - (-2) = 4.$$

A g függvény zérushelye ott van az adott intervallumban, ahol $\cos x = 0$, tehát $x = \frac{\pi}{2}$ -nél.

A két függvény grafikonjának metszéspontját a $2 \sin x = 2 \cos x$ egyenlet megoldása adja. Ezt $\cos x \neq 0$ -val osztva kapjuk, hogy $\tan x = 1$, azaz a vizsgált intervallumban $x = \frac{\pi}{4}$.

Így

$$\begin{aligned}T_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin x \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x \, dx = \\ &= [-2 \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [2 \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= (-\sqrt{2} - (-2)) + (2 - \sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2}, \\ T_2 &= T - T_1 = 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$



A két síkidom területének aránya:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2} - 4}{4} = (\sqrt{2} - 1) : 1 \approx 0,414 : 1.$$

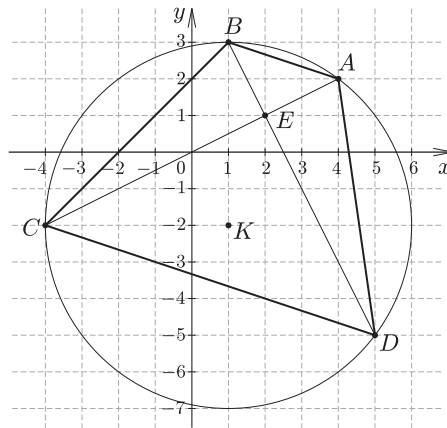
8. Egy húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra. Az átlók metszéspontja $E(2; 1)$, a húrnégyszög AB és BC oldalának egyenlete $x + 3y = 10$, illetve $x - y + 2 = 0$. Határozzuk meg a húrnégyszög csúcsainak koordinátáit és a négyszög köré írható kör egyenletét.

(16 pont)

Megoldás. A két megadott oldalegyenes egyenletéből álló egyenletrendszert megoldva kapjuk a B pont koordinátáit. BC egyenletéből $y = x + 2$, ezt AB egyenletébe visszaírva $x + 3(x + 2) = 4x + 6 = 10$, ahonnan $x = 1$, majd $y = 3$, tehát $B(1; 3)$.

A BD átló egyenesének irányvektora például \overrightarrow{EB} , tehát a $(-1; 2)$ vektor. Ezzel és az E ponttal a BD átló egyenletét felírhatjuk: $2x + y = 5$.

Az AC átló merőleges erre az átlóra, ennek tehát normálvektora lesz a $(-1; 2)$ vektor. Ezzel és az E ponttal az AC átló egyenlete: $-x + 2y = 0$.



Az A pont koordinátáit az AC átló és az AB oldalegyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásából kapjuk. Az átló egyenletéből $x = 2y$, ezt AB egyenletébe visszaírva $5y = 10$, ahonnan $y = 2$, majd $x = 4$, tehát $A(4; 2)$.

A C pont koordinátáit az AC átló és a BC oldalegyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásából kapjuk. Az átló egyenletéből $x = 2y$, ezt BC egyenletébe visszaírva $2y - y + 2 = 0$, ahonnan $y = -2$, majd $x = -4$, tehát $C(-4; -2)$.

A húrnégyszög köré írható kör megegyezik az ABC háromszög köré írható körrel. Ennek K középpontja megkapható például az AC és a BC oldal felezőmerőlegesének metszéspontjaként.

Az AC szakasz felezőpontja az origó, felezőmerőlegesének irányvektora megegyezik AC egyik normálvektorával, ami például a $(-1; 2)$ vektor. Ezekkel a felezőmerőleges egyenlete $2x + y = 0$.

A BC szakasz felezőpontja $(-1,5; 0,5)$, felezőmerőlegesének normálvektora például a \overrightarrow{CB} , tehát az $(5; 5)$ vektor. Ezekkel a felezőmerőleges egyenlete $5x + 5y = -5$, azaz $x + y + 1 = 0$.

A két felezőmerőleges egyenletéből álló egyenletrendszert kell megoldanunk. AC felezőmerőlegesének egyenletéből $y = -2x$, ezt a másik egyenletbe beírva $x - 2x + 1 = 0$, ahonnan $x = 1$, majd $y = -2$, tehát $K(1; -2)$.

A kör sugarát megadja például a KB távolság, ami 5 egység, a kör egyenlete így $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

A D pont koordinátáit végül a kör egyenletéből és a BD átló egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásaként kapjuk. A BD egyenletéből $y = 5 - 2x$, ezt visszaírva a kör egyenletébe $(x - 1)^2 + (7 - 2x)^2 = 25$. A zárójeleket felbontva és rendezve az $5x^2 - 30x + 25 = 0$ egyenletet kapjuk, melynek megoldásai $x = 1$ és $x = 5$. Az előbbi a B pontot adja meg, a másodikhoz tartozó y érték -5 , tehát $D(5; -5)$.

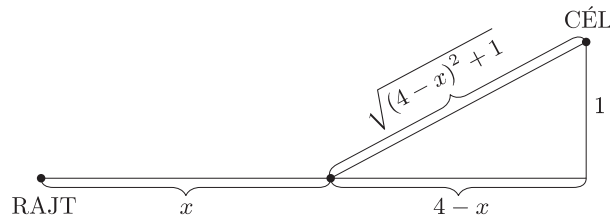
9. Egy duatlon verseny rajtja egy egyenes tengerparton van, célja a vízben. Egyik lehetőség a táv teljesítésére, hogy először 4 km-t futunk a parton, majd 90 fokkal elfordulva 1 km-t úszunk a tengerben. Azonban megengedett bármikor letérni a futópályáról és elkezdeni úszni a cél felé. A homokos tengerparton 6 km/h, a vízben 2 km/h a sebességünk. A rajtvonaltól mérve milyen távolságra érdemes bevágni a vízbe,

- ha futva és úszva egyenlő távolságot szeretnénk megtenni;
- ha a lehető leghamarabb szeretnénk célba érni? Hány km-t kell ekkor úsznunk, és mennyi idő alatt tudjuk így teljesíteni a versenytávját?

A válaszokat méter pontossággal adjuk meg.

(16 pont)

Megoldás. Jelölje x azt a távolságot a rajtvonaltól mérve, amikor bevágunk a vízbe. Ekkor futva teszünk meg x km-t, a vízben pedig az *ábrán* látható derékszögű háromszög átfogóját, azaz $\sqrt{(4-x)^2 + 1}$ km-t.



a) Megoldandó az $x = \sqrt{(4-x)^2 + 1}$ egyenlet. Mindkét oldal pozitív, ezért négyzetre emelhetünk: $x^2 = (4-x)^2 + 1$. Ebből kapjuk, hogy $x = \frac{17}{8}$.

Tehát a rajtvonaltól mérve 2,125 km-re kell bevágnunk a vízbe. Ekkor az úszva megtett távolság is valóban ennyi, hiszen

$$\sqrt{\left(4 - \frac{17}{8}\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 + \left(\frac{8}{8}\right)^2} = \frac{17}{8}.$$

b) A teljes táv megtételéhez szükséges időt ekkor a

$$t(x) = \frac{x}{6} + \frac{\sqrt{17 - 8x + x^2}}{2} \quad (0 < x < 4)$$

függvény adja meg. Ennek a függvénynek keressük a minimumát, amit ott vehet fel, ahol a deriváltja nulla. Az összetett függvények deriválási szabályát felhasználva:

$$t'(x) = \frac{1}{6} + \frac{2x - 8}{4\sqrt{17 - 8x + x^2}} = 0.$$

Egyszerűsítve és rendezve: $12 - 3x = \sqrt{17 - 8x + x^2}$. Az x -re tett kikötés miatt a bal oldal is biztosan pozitív, így négyzetre emelhetünk, majd nullára rendezve a következő egyenletet kapjuk:

$$8x^2 - 64x + 127 = 0.$$

Ennek megoldásai $x_{1,2} = 4 \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$, melyek közül csak a 4-nél kisebb jön számításba, tehát $x = 4 - \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 3,646$.

A $t(x)$ függvény folytonos, és ellenőrizhető, hogy első deriváltjának előjele x -ben negatívból pozitívba vált, így a kapott x érték valóban minimumhelye t -nek.

Tehát a rajtvonaltól számítva 3,646 km megtétele után érdemes elkezdenünk úszni. Az úszás távja ekkor

$$\sqrt{(4-x)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{18}{16}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \approx 1,061 \text{ km},$$

a teljes táv megtételéhez szükséges idő pedig

$$t\left(4 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{4}{6} - \frac{\sqrt{2}}{24} + \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{6} \approx 1,138 \text{ óra} \approx 68,3 \text{ perc}.$$

(Ha végigfutnánk a 4 km-t, akkor 70 perc alatt teljesítenénk a versenyt.)

Megjegyzés: A Snellius–Descartes-törvény felhasználásával a teljes visszaverődés határszöge is megoldást ad a feladatra.