

Megoldásvázlatok a 2012/1. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$x^2 + \frac{2x}{x+5} + \frac{1}{x^2+10x+25} = 25. \quad (12 \text{ pont})$$

Megoldás. A nevezők miatt: $x \neq -5$. Az egyenletet a következő alakba is írhatjuk:

$$\left(x + \frac{1}{x+5}\right)^2 = 25.$$

Két eset lehetséges:

I. eset: Ha $x + \frac{1}{x+5} = 5$, akkor rendezés után az $x^2 = 24$ másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek gyökei: $x_1 = \sqrt{24}$, $x_2 = -\sqrt{24}$. Mindkét gyök megoldása az egyenletnek.

II. eset: $x + \frac{1}{x+5} = -5$, akkor rendezés után az $x^2 + 10x + 26 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk. A diszkriminánsa negatív, így ebben az esetben nincs valós gyök.

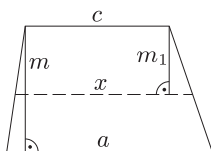
Az eredeti egyenlet két gyöke: $x_1 = \sqrt{24}$, $x_2 = -\sqrt{24}$.

2. Egy trapéz párhuzamos oldalai a és c . Mekkora az a szakasz, amely párhuzamos az alapokkal, és felezi a trapéz területét? (12 pont)

Megoldás. Jelölje a trapéz területét T , a felső kis trapézét t_1 , az alsó kis trapézét pedig t_2 . Tudjuk, hogy $T = 2t_1$, il-

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{a+c}{2} \cdot m = 2 \cdot \frac{x+c}{2} \cdot m_1, \\ (2) \quad & \frac{a+c}{2} \cdot m = 2 \cdot \frac{x+a}{2} (m - m_1). \end{aligned}$$

letve $T = 2t_2$, azaz



Az (1) egyenletből $m_1 = \frac{a+c}{2(x+c)} \cdot m$, ezt behelyettesítve a (2) egyenletbe:

$$\frac{a+c}{2} \cdot m = (x+a) \cdot \left(m - \frac{a+c}{2 \cdot (x+c)} \cdot m\right).$$

Az egyenletet m -mel ($m \neq 0$) osztva, majd néhány átalakítást végezve:

$$\begin{aligned} \frac{a+c}{2} &= (x+a) \cdot \left(1 - \frac{a+c}{2 \cdot (x+c)}\right), \\ a+c &= (x+a) \cdot \left(2 - \frac{a+c}{(x+c)}\right), \\ (a+c)(x+c) &= 2(x+a)(x+c) - (x+a)(a+c), \\ ax+ac+cx+c^2 &= 2x^2+2cx+2ax+2ac-ax-cx-a^2-ac, \\ c^2 &= 2x^2-a^2. \end{aligned}$$

Vagyis a keresett szakasz hossza: $x = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$.

3. Oldjuk meg az $\log_x(5x^2) \cdot \log_5^2 x = 1$ egyenletet a valós számok halmazán.

(13 pont)

Megoldás. Az egyenlet értelmezési tartománya: $x > 0$ és $x \neq 1$.

A logaritmus azonosságait felhasználva az egyenlet átírható a következő alakba:

$$(\log_x 5 + \log_x x^2) \cdot \log_5^2 x = 1, \quad \left(\frac{1}{\log_5 x} + 2 \right) \cdot \log_5^2 x = 1.$$

A szorzást elvégezve és rendezve: $2 \log_5^2 x + \log_5 x - 1 = 0$. Ebből:

$$(\log_5 x)_1 = \frac{1}{2}, \quad (\log_5 x)_2 = -1.$$

Az egyenlet megoldása: $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = \frac{1}{5}$.

4. Egy büfében szendvicset és pizzát árulnak. Egy szendvicsen 30%, egy pizzán 50% haszna van a kereskedőnek. Egyik nap ugyanannyi szendvicset adott el, mint pizzát, így 34% haszna lett. Másnap viszont kétszer annyi pizzát vettek meg, mint szendvicset.

a) Mennyi haszna lett a büfésnek az eladott árúkból a második napon?

b) Mennyi haszna lett volna, ha kétszer annyi szendvicset adott volna el, mint pizzát?

(14 pont)

Megoldás. a) Jelöljük a -val egy szendvics, b -vel egy pizza önköltségi árát. Ha az első alkalommal x darabot adott el a kereskedő mindkettőből, akkor 34%-os haszna volt, tehát:

$$\begin{aligned} x \cdot 0,3a + x \cdot 0,5b &= x(a + b) \cdot 0,34, \\ 0,16b &= 0,04a, \\ 4b &= a. \end{aligned}$$

Másnap y darab szendvicset és $2y$ darab pizzát adott el. Ha p %-os volt a haszna, akkor

$$\begin{aligned} y \cdot 0,3a + 2y \cdot 0,5b &= (ya + 2yb) \cdot \frac{p}{100}, \\ \frac{0,3a + b}{a + 2b} &= \frac{p}{100}. \end{aligned}$$

Felhasználva az $a = 4b$ összefüggést:

$$\begin{aligned} \frac{0,3 \cdot 4b + b}{4b + 2b} &= \frac{p}{100}, \\ \frac{2,2}{6} &= \frac{p}{100}, \\ 36,6 &= p. \end{aligned}$$

Tehát a büfésnek kb. 36,7%-os haszna volt.

b) Ha a kereskedő y db szendvicset adott el és ez kétszer annyi, mint ahány darab pizzát eladott, akkor

$$y \cdot 0,3a + \frac{y}{2} \cdot 0,5b = \left(ya + \frac{y}{2}b \right) \cdot \frac{p}{100}, \quad \text{azaz} \quad 0,3a + \frac{0,5b}{2} = \left(a + \frac{b}{2} \right) \cdot \frac{p}{100}.$$

Mivel $a = 4b$, azért

$$0,3 \cdot 4b + \frac{0,5b}{2} = \left(4b + \frac{b}{2} \right) \cdot \frac{p}{100}, \quad 1,45b = 4,5b \cdot \frac{p}{100}, \quad \text{azaz} \quad p = \frac{1,45 \cdot 100}{4,5} \approx 32,2.$$

Így a kereskedőnek kb. 32,2 % haszna lett volna.

II. rész

5. Egy 4 m átmérőjű kör alakú biliárdasztal O középpontjától 0,5 méterre levő P pontban van egy biliárdgolyó. A golyót úgy kell ellökni, hogy kétszeri visszaverődés után ismét a P ponton haladjon át. Mekkora szöget zár be az ellökés iránya a PO iránnyal?

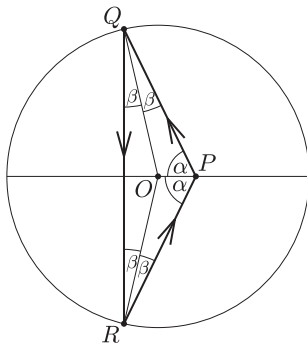
(16 pont)

Megoldás. A PO -val 0° -os és 180° -os szöget bezáró irányok teljesítik a feltételeket. Vizsgáljuk az ezektől eltérő, α szöget bezáró irányt.

A golyó a P pontból indulva a Q pontban, majd az R pontban ütközve visszaérkezik a P pontba. Az ütközés törvénye szerint $PQO = OQR$ és $QRO = ORP$. Az OQR háromszög egyenlő szárú. A beesés és visszaverődés szöge a β szög. A szimmetria miatt $OPQ = OPR = \alpha$, így a PQR háromszögből:

$$2\alpha + 4\beta = 180^\circ \quad \text{és} \quad \beta = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Az OPQ háromszögből a szinusztétel szerint: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{OQ}{OP}$. Az $OQ = 4 \cdot OP$ és a $\beta = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$ összefüggésből:



$$\frac{\sin \alpha}{\sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{4 \cdot OP}{OP} = 4.$$

Innen:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= 4 \cdot \sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}\right), \\ \sin^2 \alpha &= 8 \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 8 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

A trigonometrikus azonosságokat figyelembe véve: $\sin^2 \alpha = 8(1 - \sin \alpha)$, vagyis $\sin^2 \alpha + 8 \sin \alpha - 8 = 0$. Ennek gyökei:

$(\sin \alpha)_1 = -4 + \sqrt{24}$, ahonnan $\alpha_1 \approx 64^\circ$,

$(\sin \alpha)_2 = -4 - \sqrt{24}$, ebből nincs megoldás, mert $\sin \alpha < -1$.

A keresett szög: $\alpha \approx 64^\circ$.

6. Legyen egy sorozat általános tagja a következő képlettel adva:

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 + 4}.$$

a) Határozzuk meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ határértéket.

b) Határozzuk meg azt az N küszöbszámot, amelytől kezdve a sorozat elemei a sorozat határértékétől 10^{-2} -nél kisebb értékkel térnek el. (16 pont)

Megoldás. a)

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}} = 2.$$

b) Meg kell állapítanunk, hogy milyen n -től kezdve lesz $|a_n - A| < \frac{1}{100}$, azaz

$$\left| \frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 + 4} - 2 \right| < \frac{1}{100}.$$

Elvégezve az összevonást kapjuk:

$$\left| \frac{3n - 9}{n^2 + 4} \right| < \frac{1}{100}.$$

Mivel $n > 3$ esetén $\frac{3n - 9}{n^2 + 4} > 0$, azért a

$$\frac{3n - 9}{n^2 + 4} < \frac{1}{100}$$

egyenlőtlenséget kell vizsgálnunk. Mindkét oldalt beszorozzuk a közös nevezővel és utána rendezzük az egyenletet:

$$n^2 - 300n + 904 > 0.$$

Az így kapott másodfokú egyenlet megoldásai: $n_1 \approx 3,04$ és $n_2 \approx 296,96$.

Vagyis a keresett sorszám: 297.

7. Az iskola konyhája két helyről szokott burgonyát rendelni 10 kg-os csomagolásban. Az A beszállítótól kétszer annyit rendelnek, mint a B-től. Az A beszállító 80%, a B pedig 60% eséllyel szállítja a rendelt mennyiséget egy héten belül.

- a) Mennyi az esélye, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott 10 kg-os csomagra több, mint egy hetet kell várni?
 b) Ha tudjuk, hogy egy héten belül leszállították a burgonyát, akkor mekkora az esélye annak, hogy A-tól rendelték?
 c) Ha a szállítás késése esetén 10% engedménnyel adják a burgonyát, és egy 10 kg-os csomag ára 800 Ft mindkét beszállítónál, akkor várhatóan hány forintot fizetnek egy 10 kg-os csomagért? (16 pont)

Megoldás. a) Legyen x a B beszállítótól rendelt 10 kg-os csomagok száma.

Az egy héten túli rendelések várható száma A-nál: $0,2 \cdot 2x$, B-nél: $0,4x$, összesen $0,8x$. Összes rendelés mennyisége: $3x$.

$$P = \frac{0,2 \cdot 2x + 0,4x}{3x} = \frac{0,8}{3} \approx 0,27.$$

A keresett esély kb. 0,27.

b) Jelölje A azt az eseményt, hogy az árut A-tól rendelték, H pedig azt az eseményt, hogy egy héten belül megérkezett. Ekkor:

$$P(A | H) = \frac{P(AH)}{P(H)} = \frac{0,8 \cdot 2x}{0,8 \cdot 2x + 0,6x} = \frac{1,6}{2,2} \approx 0,73.$$

A keresett esély kb. 0,73.

c)

$$M = 0,27 \cdot 800 \cdot 0,9 + (1 - 0,27) \cdot 800 = 778,4.$$

Vagyis várhatóan kb. 778 Ft-ot fizetnek érte.

8. Egy y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola csúcspontja a $T(1;4)$ pont, a parabola 2 abszcisszájú pontjába húzható érintő iránytangense 6. Határozzuk meg az y tengely, a parabolaív és a parabola 2 abszcisszájú pontjához húzható érintő által bezárt síkidom területét. (16 pont)

Megoldás. A parabola egyenletének meghatározása:

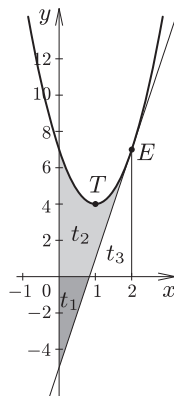
$$y = a(x - 1)^2 + 4 = ax^2 - 2ax + a + 4,$$

$y' = 2ax - 2a$, innen $6 = y'(2) = 2a$, és így $a = 3$.

A parabola egyenlete $y = 3x^2 - 6x + 7$. Az érintő egyenlete az $E(2;7)$ pontban $y = 6x - 5$, $t = t_1 + t_2 - t_3$, ahol a t_2 a parabola alatti terület a $[0; 2]$ -ban, t_1 és t_3 pedig egy-egy háromszög területe.

$$\begin{aligned} t &= \frac{\frac{5}{6} \cdot 5}{2} + \int_0^2 (3x^2 - 6x + 7) dx - \frac{7(2 - \frac{5}{6})}{2} = \\ &= \frac{25}{12} + [x^3 - 3x^2 + 7x]_0^2 - \frac{49}{12} = \\ &= \frac{25}{12} + (8 - 12 + 14) - \frac{49}{12} = 8. \end{aligned}$$

Vagyis a kérdéses terület 8 területegység.



9. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(1;2)$ ponton, és az $x - y + 5 = 0$, valamint az $x - y = 2$ egyenesek közé eső szakasza 5 egység. (16 pont)

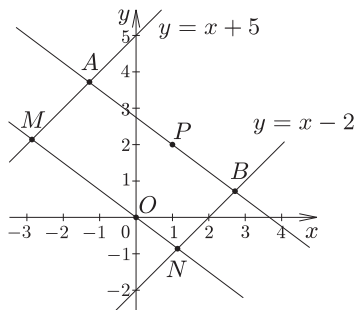
Megoldás. Legyen a feltételnek megfelelő egyenes az AB . Toljuk el párhuzamosan az origóba, legyen ez az MN egyenes, ennek egyenlete $y = mx$.

Az $y = mx$ és $y = x + 5$ egyenesek metszéspontja: $M\left(\frac{5}{m-1}; \frac{5m}{m-1}\right)$.

Az $y = mx$ és $y = x - 2$ egyenesek metszéspontja: $N\left(\frac{-2}{m-1}; \frac{-2m}{m-1}\right)$.

A feltétel szerint $MN = 5$, ezért

$$MN^2 = 25 = \left(\frac{7}{m-1}\right)^2 + \left(\frac{7m}{m-1}\right)^2.$$



Rendezés után a $12m^2 + 25m + 12 = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek megoldásai: $m = -\frac{3}{4}$; $m = -\frac{4}{3}$. Az ilyen meredekségű, és a $P(1;2)$ ponton átmenő egyenesek egyenlete: $4x + 3y = 10$, illetve $3x + 4y = 11$.