Megoldásvázlatok a 2012/3. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. *A gyógyszertárakban a meghűlésre kapható, forró vízben feloldható port egyforma kis zacskókban hatosával és tízesével kartondobozokban árusítják. A hatos dobozok ára* 1130 Ft, *a tízeseké* 1640 Ft. *Mivel a dobozok anyagköltsége csak minimálisan tér el, ezért azt feltételezzük, hogy ezek ára a méretüktől függetlenül ugyanannyi, és a port tartalmazó zacskók árát is azonosnak gondoljuk. Mennyibe kerülne ekkor egy tizennégyes kiszerelésű doboz?* (*11 pont*)

Megoldás. Legyen egy zacskó ára x Ft, egy doboz ára y Ft. A szöveg alapján felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 6x+y &= 1130, \\ 10x+y &= 1640. \end{cases}$$

A második egyenletből kivonjuk az elsőt:

$$4x = 510, \qquad x = 127{,}5.$$

Visszahelyettesítéssel kapjuk: $y = 365$. Vagyis egy zacskó 127,5 Ft-ba, egy doboz pedig 365 Ft-ba kerül a feltételezéseink alapján. Ekkor a tizennégyes kiszerelésű doboz ára: $14x + y = 14 \cdot 127{,}5 + 365 = 2150$.

Vagyis 2150 Ft-ba kerülne a tizennégyes kiszerelésű doboz.

2. *Oldjuk meg a következő egyenletet:*

$$\lg(1-x) \cdot \sqrt{x^2-3x-28} \cdot \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 0. \qquad (13\ pont)$$

Megoldás. A logaritmus miatt: $x \in\ ]-\infty; 1]$, a négyzetgyök miatt: $x^2-3x-28 \geq 0$, azaz $x \in\ ]-\infty; -4] \cup [7; \infty[$. Vagyis a feladat értelmezési tartománya: $x \in\ ]-\infty; -4]$.

A tényezők zérushelyeit külön-külön megvizsgáljuk. Az első tényező zérushelye a 0, de ez nincs benne az értelmezési tartományban. A második tényező zérushelyei a -4 és a 7, de a feladat értelmezési tartományának csak a -4 felel meg. A harmadik tényező zérushelyei:

$$x+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \text{ egész szám}), \quad \text{ahonnan:} \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

A feladat értelmezési tartománya miatt azonban:

$$\frac{\pi}{3} + k\pi \leq -4, \qquad k \leq \frac{-4-\frac{\pi}{3}}{\pi} \approx -1{,}607 < -2.$$

A megoldás: $x_1 = -4$, $x_2 = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$, ahol $k < -2$ egész szám.

3. *Bettina megvásárolta a legújabb mozaik púdert. A mellékelt kép mutatja a* 4 cm*-es sugarú henger alakú tégelyt felülnézetben.*

a) A minta közepén látható ötszög szabályos, és az ezekhez kapcsolódó ötszögekkel ismét egy nagyobb szabályos ötszög alakul ki. Hogyan aránylana egymáshoz ennek a két szabályos ötszögnek az oldala, ha a tégelyben látható 16 *síkidom területe egyenlő nagyságú lenne?*

b) Adjuk meg az előző feltételek teljesülése mellett a középen látható kis, szabályos ötszög oldalának hosszát milliméter pontossággal.

(*13 pont*)

Megoldás. a) Mivel a kis síkidomok területe egyenlő, ezért a két szabályos ötszög területének aránya: $\frac{1}{6}$. Tudjuk, hogy a területek a hasonlóság arányának négyzetével arányosak. Legyen a kis ötszög oldalának hossza a', a nagy ötszög oldalának hossza pedig a. Ekkor:

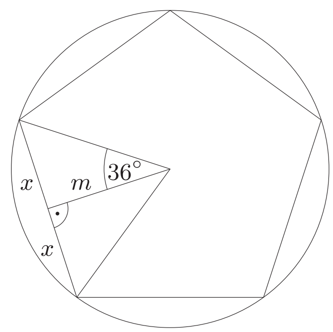
$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{1}{6}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{a'}{a} = \sqrt{\frac{1}{6}} \approx 0{,}4082.$$

b) A kör területe: $t_{\text{kör}} = 4^2 \cdot \pi = 16\pi$. Mivel a mozaik púder mintája 16 egyenlő területű síkidomból áll, ezért a középen látható szabályos ötszög területe: $t = \pi$. A feladatunk ezek alapján a π területű szabályos ötszög oldalhosszának meghatározása.

A szabályos ötszöget a középpontjából öt $72°$-os szárszögű egyenlőszárú háromszögre bonthatjuk. Ennek az alapja legyen $2x$, ekkor az alaphoz tartozó magasság $m = \frac{x}{\operatorname{tg} 36°}$. Ezekkel felírjuk a területet:

$$x \cdot \frac{x}{\operatorname{tg} 36°} = \frac{\pi}{5}, \quad \text{amiből:} \quad 2x = \sqrt{\frac{4}{5} \cdot \pi \cdot \operatorname{tg} 36°} \approx 1{,}4.$$

Vagyis a kis, szabályos ötszög oldalának hossza kb. 1,4 cm.



4. *Oldjuk meg a*

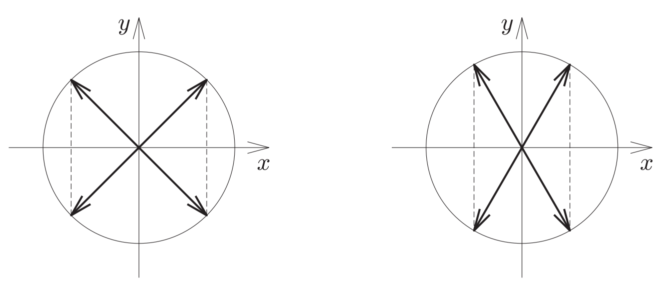
$$2\sin^2 2x - 2\cos^2 x = 1$$

egyenletet. *(14 pont)*

Megoldás. Az ismert azonosságok segítségével alakítsuk az egyenletet:

$$2(2\sin x \cos x)^2 - 2\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x,$$
$$8\sin^2 x \cos^2 x - 3\cos^2 x - \sin^2 x = 0,$$
$$8\big(1-\cos^2 x\big)\cos^2 x - 3\cos^2 x - \big(1-\cos^2 x\big) = 0,$$
$$8\cos^4 x - 6\cos^2 x + 1 = 0,$$
$$\big(\cos^2 x\big)_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{16} = \frac{6 \pm 2}{16}, \qquad \big(\cos^2 x\big)_1 = \frac{1}{2}, \quad \big(\cos^2 x\big)_2 = \frac{1}{4},$$

Vagyis: $(\cos x)_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $(\cos x)_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $(\cos x)_{21} = \frac{1}{2}$, $(\cos x)_{22} = -\frac{1}{2}$.



A megoldások összevonva:

$x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1 \cdot \frac{\pi}{2}$, ahol $k_1 \in \mathbb{Z}$,

$x_2 = \frac{\pi}{3} + k_2 \cdot \pi$, ahol $k_2 \in \mathbb{Z}$,

$x_3 = \frac{2\pi}{3} + k_3 \cdot \pi$, ahol $k_3 \in \mathbb{Z}$.

II. rész

5. *Az $y = x^2 - 4x + 8$ egyenletű parabolához a 0 és a 4 abszcisszájú pontjában is érintőt húzunk.*
a) Mekkora a két érintő hajlásszöge?
b) Mekkora a két érintő és a parabola által meghatározott síkidom területe?

(*16 pont*)

$$\begin{cases} y = -4x + 8, \\ y = 4x + 8. \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk. A metszéspont: $C(2;0)$.

A két érintő hajlásszöge az $ACB\sphericalangle$. Az ABC egyenlőszárú háromszög szárszögét kell meghatároznunk. Az ACF derékszögű háromszögben (F az AB felezőpontja) a C-nél lévő szög nyilvánvalóan a keresett szög fele. Erre a φ szögre felírható a derékszögű háromszögben a tangens: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{8}$, azaz $\varphi \approx 14{,}036°$.

A két érintő hajlásszöge: $2\varphi \approx 28{,}1°$.

b) A keresett T területet megkapjuk, ha a $[0;4]$-on a parabola alatti t területből elvesszük a $[0;2]$-on az e_1 érintő alatti t_1, és a $[2;4]$-on az e_2 érintő alatti t_2 területet. Az adatok alapján:

$$t_1 = t_2 = \frac{2 \cdot 8}{2} = 8.$$

A parabola alatti területet integrál segítségével határozzuk meg:

$$t = \int_0^4 \left(x^2 - 4x + 8\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 8x\right]_0^4 = \frac{4^3}{3} - 4 \cdot \frac{4^2}{2} + 8 \cdot 4 = \frac{64}{3}.$$

A keresett terület: $T = t - (t_1 + t_2) = \frac{64}{3} - 16 = \frac{16}{3}$.

6. *Egy szivattyú óránként $4{,}8\ \mathrm{m}^3$ vizet tud kiemelni a kútból. A vizet henger alakú medencébe eresztik, melynek teteje $154\ \mathrm{m}^2$-es körlap. Ez a körlap fedi a medence $12\ \mathrm{cm}$-es vastagságú oldalfalát is.*
a) Hány centimétert emelkedik 2,5 óra alatt a víz a medencében?
b) A 15 perc alatt kiemelt vízmennyiséget 25 literes és 60 literes edényekbe töltik. Melyik edényből hány darab lehetett, ha pontosan megteltek ezzel a vízmennyiséggel?

(*16 pont*)

Megoldás. *a*) A fedőlap területe segítségével meghatározható a henger alakú medence R sugarának hossza: $154 = R^2 \cdot \pi$, amiből $R = \sqrt{\frac{154}{\pi}} \approx 7{,}00$ (m). Mivel az oldalfal 12 cm-es vastagságú, ezért a henger belső sugara: $r = 6{,}88$ m.

2,5 óra alatt $2{,}5 \cdot 4{,}8 = 12\ \mathrm{m}^3$ vizet emel ki a szivattyú. Ennek a vízmennyiségnek legyen m a magassága a henger alakú medencében. A térfogatot felírva a következő összefüggést kapjuk:

$$12 = 6{,}88^2 \cdot \pi \cdot m, \quad \text{vagyis} \quad m = \frac{12}{6{,}88^2 \cdot \pi} \approx 0{,}081.$$

Mindössze 8,1 cm-t emelkedik a medencében a vízszint 2,5 óra elteltével.

b) Mivel óránként $4{,}8\ \mathrm{m}^3$ vizet tudunk kiszivattyúzni, ezért 15 perc alatt ennek negyedét, azaz 1200 litert. Legyen a 25 literes edények száma x, a 60 litereseké pedig y. Ekkor:

$$\begin{aligned} 25x + 60y &= 1200, \\ 5x + 12y &= 240, \\ x = \frac{240 - 12y}{5} &= 48 - \frac{12}{5}y. \end{aligned}$$

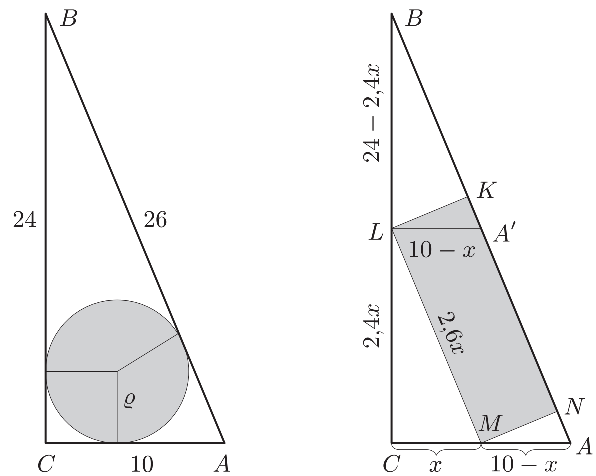
Mivel x, y darabszámot jelent, így y csak olyan 5-tel osztható természetes szám lehet, ami mellett x is természetes szám.

A lehetséges értékpárokat táblázatba rendeztük:

y	0	5	10	15	20
x	48	36	24	12	0

7. *Egy téglalap alakú telek két szomszédos oldalán az egyik csúcstól* 10 *méterre, illetve* 24 *méterre kijelölünk egy-egy pontot. A pontokat összekötő vonallal levágott derékszögű háromszögbe szeretnénk egy medencét építeni. Az egyik terv szerint a legnagyobb kör alakút, a másik terv szerint a legnagyobb, egy teljes oldalával a derékszögű háromszög átfogójához csatlakozó téglalap alakú medencét kellene megépíteni. Melyik esetben és mennyivel lenne nagyobb a vízfelület?* (*16 pont*)

Megoldás. Az *ábra* a két tervről készített vázlatot mutatja.



Az első esetben a háromszög beírt köréről van szó. Pitagorasz-tétellel kapjuk a harmadik oldal hosszát: $c=\sqrt{24^2+10^2}=26$. A háromszög területe a két befogóval meghatározható: $t=\dfrac{10\cdot 24}{2}=120$. Alkalmazhatjuk a terület felírására a $t=\varrho\cdot s$ képletet is, ahol ϱ a beírt kör sugarának a hossza, az s pedig a háromszög kerületének a fele. Vagyis

$$s=\frac{10+24+26}{2}=30,\quad \text{így}\quad \varrho=\frac{t}{s}=\frac{120}{30}=4.$$

A kör alakú medence esetén a vízfelület nagysága: $t_{\text{kör}}=4^2\cdot\pi\approx 50{,}3\ (\mathrm{m}^2)$.

A második terv esetén a maximális területű $KLMN$ téglalapot keressük. Az ábra jelöléseinek felhasználásával írjuk fel a keresett területet x függvényében. (Az ábrán látható, hogy $CM=x$.)

$$\begin{aligned}T(x)&=T_{ABC}-T_{MLC}-T_{LBK}-T_{AMN}=T_{ABC}-T_{MLC}-T_{A'BL}=\\&=\frac{10\cdot 24}{2}-\frac{x\cdot 2{,}4x}{2}-\frac{(10-x)(24-2{,}4x)}{2}=\\&=120-\left(120-12x-12x+1{,}2x^2\right)-1{,}2x^2=-2{,}4x(x-10).\end{aligned}$$

A kapott másodfokú függvény hozzárendelésében a másodfokú tag együtthatója negatív, a két zérushelye pedig 0 és 10, így $x=5$-nél maximuma van. Ekkor

$$T(5)=-2{,}4\cdot 5\cdot(5-10)=60.$$

Vagyis a téglalap alakú medence esetén a vízfelület nagysága 60 m^2.

Ebben az esetben kb. 9,7 m^2-rel nagyobb vízfelületet kapunk, mint a kör alakú terv kivitelezése esetén.

8. *Egy hatszög három csúcsának koordinátája valamilyen sorrendben a következő:* $(-1;-1)$*;* $(2;8)$*;* $(7;3)$*. Határozzuk meg a hiányzó csúcsok koordinátáit, ha tudjuk, hogy az ismeretlen pontok mindegyike az adott három csúccsal húrtrapézt alkot.* (*16 pont*)

Megoldás. Az adott pontok: $A(-1;-1)$; $B(2;8)$; $C(7;3)$. A feladat szövegéből következik, hogy a keresett pontok illeszkednek az ABC háromszög köré írt körére. Először ennek a körnek írjuk fel az egyenletét:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0.$$

Mivel erre a körre illeszkedik az A, B és C csúcs is, így felírható a következő egyenletrendszer:

$$\begin{cases}1+1-a-b+c=0,\\4+64+2a+8b+c=0,\\49+9+7a+3b+c=0,\end{cases}\quad\text{azaz}\quad\begin{cases}-a-b+c=-2,\\2a+8b+c=-68,\\7a+3b+c=-58.\end{cases}$$

A c kiküszöbölésével kapjuk:

$$\begin{cases} 3a + 9b &= -66, \\ 8a + 4b &= -56, \end{cases} \quad \text{amiből} \quad \begin{cases} 2a + 6b &= -44, \\ 2a + b &= -14, \end{cases}, \quad \text{azaz: } b = -6, \quad a = -4, \quad c = -12.$$

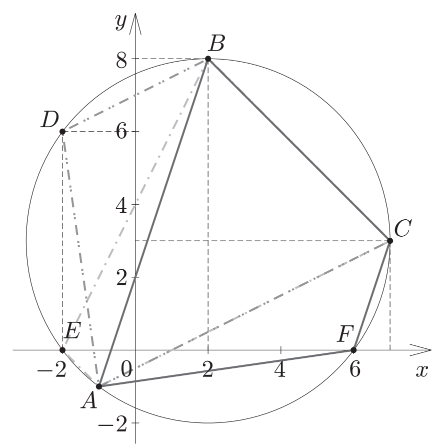
A keresett k kör egyenlete: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.

Az A, B, C pontokhoz háromféleképpen tudunk negyediket elhelyezni, hogy húrtrapézt határozzanak meg. Ezeket D-vel, E-vel, F-fel jelöljük.

I. eset: A D pont rajta van a B pontra illeszkedő AC-vel párhuzamos e egyenesen (és természetesen a k körön is). Az e egy irányvektora $\overrightarrow{AC}(8;4)$, így egy normálvektora: $\overrightarrow{n_e}(1;-2)$. Az e egyenes egyenlete: $x - 2y = -14$.

A k és az e egyenlete által kapott egyenletrendszer egyik megoldása természetesen a B pont, a másik megoldás a keresett $D(-2;6)$ pont koordinátáját adja.

II. eset: Az E pont rajta van az A pontra illeszkedő BC-vel párhuzamos f egyenesen (és természetesen a k körön is). Az f egy irányvektora $\overrightarrow{BC}(5;-5)$, így egy normálvektora: $\overrightarrow{n_f}(1;1)$. Az f egyenes egyenlete: $x + y = -2$.



A k és az e egyenlete által kapott egyenletrendszer egyik megoldása természetesen az A pont, a másik megoldás a keresett $E(-2;0)$ pont koordinátáját adja.

III. eset: Az F pont rajta van a C pontra illeszkedő AB-vel párhuzamos g egyenesen (és természetesen a k körön is). A g egy irányvektora $\overrightarrow{AB}(3;9)$, így egy normálvektora: $\overrightarrow{n_g}(3;-1)$. A g egyenes egyenlete: $3x - y = 18$.

A k és az e egyenlete által kapott egyenletrendszer egyik megoldása természetesen a C pont, a másik megoldás a keresett $F(6;0)$ pont koordinátáját adja.

Ezzel a hatszög mind a hat csúcsának koordinátáját megadtuk.

9. *Legyen*

$$A = \frac{6n^2 - 15n - 9}{4n^2 - 18n - 10}.$$

a) Mennyi a $\lim\limits_{n\to\infty} A$ *határérték?*

b) Adjuk meg azokat az n egész számokat, amelyek esetén az A is egész szám.

c) Oldjuk meg az $A = 3$ egyenletet. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Alkalmazzuk a megfelelő átalakításokat és használjuk a határértékre vonatkozó tételeket:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2 - 15n - 9}{2n^2 - 9n - 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{6 - \frac{15}{n} - \frac{9}{n^2}}{2 - \frac{9}{n} - \frac{5}{n^2}} = \frac{6 - 0 - 0}{2 - 0 - 0} = 3.$$

b) A számláló és a nevező zérushelyeinek megkeresése után írjuk szorzatalakban a másodfokú kifejezéseket.

A $6n^2 - 15n - 9 = 0$ gyökei: $n_1 = 3$, $n_2 = -\dfrac{1}{2}$.

A $2n^2 - 9n - 5 = 0$ gyökei: $n_3 = 5$, $n_4 = -\dfrac{1}{2}$.

Most már az is látható, hogy n értéke nem lehet 5, és nem lehet $-\dfrac{1}{2}$, mert ekkor a nevező értéke nulla lenne.

Írjuk fel a szorzatalakokat és végezzük el az egyszerűsítéseket:

$$A = \frac{6n^2 - 15n - 9}{4n^2 - 18n - 10} = \frac{6(n-3)\left(n + \frac{1}{2}\right)}{2(n-5)\left(n + \frac{1}{2}\right)} = \frac{3(n-3)}{n-5}.$$

A kapott törtet alakítsuk a következő módon:

$$A = \frac{3(n-3)}{n-5} = \frac{3n-9}{n-5} = \frac{3(n-5)+6}{n-5} = 3 + \frac{6}{n-5}.$$

Ez akkor lesz egész, ha $n-5$ osztója a 6-nak. A következő lehetőségeket kapjuk:

$n-5$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
n	-1	2	3	4	6	7	8	11
A	2	1	0	-3	9	6	5	4

A táblázat második sorában láthatók a megfelelő n értékek.

c) $A = \frac{6n^2-15n-9}{2n^2-9n-5} = 6$ egyenlet bal oldalán álló kifejezés a szorzattá bontások után egyszerűsíthető. Ekkor a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{3(n-3)}{n-5} = 6, \quad \Longleftarrow \quad 3n-9 = 6(n-5) = 6n-30, \quad \Longleftarrow \quad n = 7.$$

Ez valóban megoldása az egyenletnek.

Megjegyzés. Ha egyszerűsítés nélkül szorzunk a $2n^2-9n-5$ nevezővel, akkor egy másodfokú egyenletet kapunk. Ennek két gyöke a 7, illetve a $-\frac{1}{2}$. Természetesen az értelmezési tartomány miatt csak a 7 lesz a megoldás.

Számadó László