Emelt szintű gyakorló feladatsor

I. rész

1. Egy számtani sorozat differenciája 56, n-edik eleme 2012. A sorozat első n elemének összege 32 000. Határozzuk meg a sorozat első elemét. (*12 pont*)

2. Egy közpark olyan egyenlő szárú háromszög alakú, melynek szárai 40 méteresek, a szárak által bezárt szög pedig 50°-os. A szárak találkozásától egy 35 méter sugarú körívet húznak. A köríven belüli részt füvesítik, a köríven kívüli részt pedig virágokkal ültetik be.

a) Határozzuk meg a beültetéshez szükséges virágtövek számát, ha egy négyzetméterre 30 tő virágot számolnak.

b) A park kerületén körben és a körívnek a park belsejébe eső részére ösvényeket terveznek. Határozzuk meg az építendő ösvények teljes hosszúságát (a számítások során az ösvények szélességét elhanyagolhatjuk). (*13 pont*)

3. Hány olyan nem izomorf, egyszerű gráf van, melynek pontjainak fokszámsorozata

a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;

b) 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5;

c) 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6;

d) 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6;

e) 2; 3; 3; 4; 4; 4 ?

Amelyik esetben nem létezik ilyen gráf, indokoljuk is meg, hogy miért nem.

(*14 pont*)

4. Téglalap alakú földdarabot szeretnénk felmérni. Ehhez a téglalap egyik oldalának belsejében felvesszük az egymástól 50 méterre található A és B pontokat. A téglalapnak e két pontot tartalmazó oldalával szemközti csúcsait jelölje C és D. Megmérjük a következő szögeket: CAB szög 113°-os, DAB szög 48°-os, CBA szög 54°-os. Mekkora a földdarab területe? (*12 pont*)

II. rész

5. Dani teniszezik. Egy versenyen első adogatásainak 63%-át ütötte érvényes területre. Ha érvényes területre ment az első adogatás, akkor a labdamenetek 90%-át megnyerte. Ha nem ment érvényes területre, akkor egy másodikat adogathatott. Ezeknek 85%-át ütötte érvényes területre. Amikor a második adogatás érvényes területre ment, akkor a labdamenetek 60%-át nyerte meg. Ha egyik adogatását sem ütötte érvényes területre, akkor Dani elveszítette a labdamenetet.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy Dani elveszített egy labdamenetet, amikor ő adogathatott?

b) Mekkora a valószínűsége, hogy Dani első adogatása már érvényes területre ment, ha tudjuk, hogy az adott labdamenetet elveszítette? (*16 pont*)

6. *a*) Határozzuk meg $\frac{x}{y}$ értékét három tizedesjegy pontossággal, ha tudjuk, hogy $2^x = 5^y$, ahol x és y nullától különböző valós számok.

b) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok lehető legbővebb részhalmazán:

$$\frac{5}{2}\sqrt{\lg x} + 2\lg\sqrt{\frac{1}{x}} - 1 < 0.$$

(*16 pont*)

7. Az $f(x) = 2\sin x$ függvény grafikonja és az x tengely által a $[0;\pi]$ intervallumon közrezárt síkidomot a $g(x) = 2\cos x$ függvény görbéje két síkidomra bontja. Határozzuk meg a két síkidom területének arányát. (*16 pont*)

8. Egy húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra. Az átlók metszéspontja $E(2;1)$, a húrnégyszög AB és BC oldalának egyenlete $x + 3y = 10$, illetve $x - y + 2 = 0$. Határozzuk meg a húrnégyszög csúcsainak koordinátáit és a négyszög köré írható kör egyenletét. (*16 pont*)

9. Egy duatlon verseny rajtja egy egyenes tengerparton van, célja a vízben. Egyik lehetőség a táv teljesítésére, hogy először 4 km-t futunk a parton, majd 90 fokkal elfordulva 1 km-t úszunk a tengerben. Azonban megengedett bármikor letérni a futópályáról és elkezdeni úszni a cél felé. A homokos tengerparton 6 km/h, a vízben 2 km/h a sebességünk. A rajtvonaltól mérve milyen távolságra érdemes bevágni a vízbe,

a) ha futva és úszva egyenlő távolságot szeretnénk megtenni;

b) ha a lehető leghamarabb szeretnénk célba érni? Hány km-t kell ekkor úsznunk, és mennyi idő alatt tudjuk így teljesíteni a verseny távját?

A válaszokat méter pontossággal adjuk meg.

(*16 pont*)