

$$(3) \quad \left| \dots \left| |x| - 2^n - 2^{n-1} - \dots - 2^{k+1} \right| \right| \leq 2^{k+1},$$

akkor

$$||\dots||x| - 2^n| - 2^{n-1}| - \dots| - 2^{k+1}| - 2^k| \leq 2^k \quad (\text{ahol } 0 \leq k \leq n).$$

Bizonyítás. $||\dots||x| - 2^n| - 2^{n-1}| - \dots| - 2^{k+1}| - 2^k|$ maximális akkor lehet, ha

$$(4) \quad ||\dots||x| - 2^n| - 2^{n-1}| - \dots| - 2^{k+1}| - 2^k|$$

minimális, vagy maximális.

Mivel a (3) indukciós feltétel teljesül, és felveszi a 2^{k+1} értéket (pl. $x = 2^{n+1}$ -re), azért ha (4) maximális, akkor

$$||\dots||x| - 2^n| - 2^{n-1}| - \dots| - 2^{k+1}| - 2^k| = 2^{k+1} - 2^k = 2^k,$$

ha pedig (4) minimális, akkor

$$||\dots||x| - 2^n| - 2^{n-1}| - \dots| - 2^{k+1}| - 2^k| = 0 - 2^k = -2^k.$$

Így

$$||\dots||x| - 2^n| - 2^{n-1}| - \dots| - 2^{k+1}| - 2^k| \leq 2^k.$$

Az előzőek miatt $f(x) \leq 2^0 = 1$ teljesül a vizsgált intervallumban.

Bizonyítsuk ugyanezt $g(x)$ -re. Nézzük végig azt a folyamatot, ahogy $g(x)$ készül. Vesszük x abszolút értékét, majd levonunk 1-et és vesszük annak az abszolút értékét. Ezután ismét levonunk 1-et, és abszolút értéket képzünk, ... stb. Állítsuk meg ezt a folyamatot ott, ahol

$$||\dots||x| \underbrace{-1| - 1| - \dots| - 1|}_{k \text{ db egyes}} = 1 \quad (0 \leq k \leq 2^{n+1} - 1).$$

Ilyen helyzet biztosan előáll valamikor, hiszen $|x| \leq 2^{n+1}$, és $2^{n+1} - 1$ darab 1-est vonunk le összesen. Ha ekkor még nem vagyunk $g(x)$ képzésének végén, akkor az abszolút értékek alakulása:

$$\begin{aligned} ||\dots||x| \underbrace{-1| - 1| - \dots| - 1|}_{k+1 \text{ db egyes}} &= 0, \\ ||\dots||x| \underbrace{-1| - 1| - \dots| - 1|}_{k+2 \text{ db egyes}} &= 1, \\ ||\dots||x| \underbrace{-1| - 1| - \dots| - 1|}_{k+3 \text{ db egyes}} &= 0, \dots \text{ stb.} \end{aligned}$$

Látható, hogy innentől $g(x)$ nem lesz nagyobb 1-nél. Azonban, mint láttuk, $g(x)$ képzése közben egyszer biztosan eléri az 1 értéket, tehát $g(x) \leq 1$.

Beláttuk, hogy $|x| \leq 2^{n+1}$ esetben $f(x) \leq 1$ és $g(x) \leq 1$. Elérkeztünk a bizonyítás második részéhez. Szeretnénk az előbbieket felhasználásával megmutatni, hogy $f(x) = g(x)$. A könnyebb átláthatóság kedvéért alakítsuk át az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeket. A szabályok szerint bontsuk fel $f(x)$ -ben és $g(x)$ -ben az abszolút érték jeleket, kivéve x -ét és az utolsót:

$$(1') \quad f(x) = |x| \pm 2^n \pm 2^{n-1} \pm \dots \pm 2 \pm 1 \quad \text{és}$$

$$(2') \quad g(x) = ||x| \pm 1 \pm 1 \pm \dots \pm 1 \pm 1|,$$

ahol a $\pm$ előjel $+$, vagy $-$ úgy, ahogy a felbontás műveletét végezzük.

Tekintsük $f(x)$ -nek az (1') szerint felbontott alakját. Jelölje $A(x)$ az $|x|$ -hez hozzáadott és kivont számok összegét, azaz

$$A(x) = \pm 2^n \pm 2^{n-1} \pm \dots \pm 2 \pm 1,$$

ahol az egyes tagok előjelei az abszolút érték felbontások esetén alakulnak, tehát $|x|$ nagyságától függenek. Ekkor tehát $f(x) = ||x| - A(x)|$. Az $A(x)$ páratlan szám, hiszen 2-hatványok összege és különbsége ± 1 ($= \pm 2^0$).

Ugyanígy tekintsük $g(x)$ -nek a (2') szerint felbontott alakját. Jelölje $B(x)$ az $|x|$ -hez hozzáadott és kivont számok összegét, vagyis

$$B(x) = \pm 1 \pm 1 \pm \dots \pm 1 \pm 1,$$

ahol az egyes tagok előjelei az abszolút érték felbontások esetén alakulnak, tehát $|x|$ nagyságától függenek. Ekkor tehát $g(x) = ||x| - B(x)|$. $B(x)$ is páratlan szám, hiszen $2^{n+1} - 1$ darab, azaz páratlan darab egyes összege vagy különbsége.

Így $f(x)$ -et és $g(x)$ -et egyszerűbb alakra hoztuk, használjuk ezt tovább. Most $|x|$ -et alakítjuk át úgy, hogy a bizonyítás szemléletes legyen: írjuk át $[|x|] + \{|x|\}$ alakba (ahol $[|x|]$ az $|x|$ egész részét, $\{|x|\}$ az $|x|$ törtrészét jelenti).

Így

$$f(x) = ||x| - A(x)| = |[|x|] + \{|x|\} - A(x)|$$

és

$$g(x) = ||x| - B(x)| = ||x| + \{x\} - B(x)|.$$

Bontsuk fel a legkülső abszolút érték jeleket $f(x)$ -ben és $g(x)$ -ben is. Ezt kétszer két esetre bontjuk $f(x)$ és $g(x)$ esetében is, attól függően, hogy $||x| + \{x\} - A(x)$ nemnegatív, vagy negatív, és attól függően, hogy $\{x\} = 0$, vagy $\{x\} \neq 0$.

- (1) Ha $||x| + \{x\} - A(x) \geq 0$, akkor $f(x) = ||x| + \{x\} - A(x)| \leq 1$ miatt $0 \leq ||x| + \{x\} - A(x) \leq 1$. Ekkor tehát $0 - \{x\} \leq ||x| - A(x) \leq 1 - \{x\}$.

- (a) Ha $\{x\} = 0$, akkor $0 \leq ||x| - A(x) \leq 1$. $||x|$ és $A(x)$ egész számok, ezért $||x| - A(x)$ is egész, ebből következik, hogy $||x| - A(x) = 0$ vagy 1 . Mivel $A(x)$ páratlan, azért

$$||x| - A(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |x| \text{ páratlan,} \\ 1, & \text{ha } |x| \text{ páros.} \end{cases}$$

Így $f(x) = 0$, ha $|x|$ páratlan, és $f(x) = 1$, ha $|x|$ páros.

- (b) Ha $\{x\} \neq 0$, akkor $0 - \{x\} \leq ||x| - A(x) \leq 1 - \{x\}$. Itt $||x|$ és $A(x)$ egész számok, ezért $||x| - A(x)$ is egész, ebből következik, hogy $||x| - A(x) = 0$. Így

$$f(x) = ||x| + \{x\} - A(x)| = |0 + \{x\}| = \{x\}.$$

- (2) Ha $||x| + \{x\} - A(x) < 0$, akkor $f(x) = ||x| + \{x\} - A(x)| \leq 1$ miatt $0 < A(x) - ||x| - \{x\} \leq 1$. Ekkor tehát $\{x\} < A(x) - ||x| \leq 1 + \{x\}$.

- (a) Ha $\{x\} = 0$, akkor $0 < A(x) - ||x| \leq 1$. Az $||x|$ és $A(x)$ egész számok, ezért $A(x) - ||x|$ is egész, ebből következik, hogy $A(x) - ||x| = 1$. Így $f(x) = 1$.

- (b) Ha $\{x\} \neq 0$, akkor $\{x\} < A(x) - ||x| \leq 1 + \{x\}$. Az $||x|$ és $A(x)$ egész számok, ezért $A(x) - ||x|$ is egész, ebből következik, hogy $A(x) - ||x| = 1$. Így

$$f(x) = ||x| + \{x\} - A(x)| = A(x) - ||x| - \{x\} = 1 - \{x\}.$$

Hasonlóan

- (1) Ha $||x| + \{x\} - B(x) \geq 0$, akkor $g(x) = ||x| + \{x\} - B(x)| \leq 1$ miatt $0 \leq ||x| + \{x\} - B(x) \leq 1$, ekkor tehát $0 - \{x\} \leq ||x| - B(x) \leq 1 - \{x\}$.

- (a) Ha $\{x\} = 0$, akkor $0 \leq ||x| - B(x) \leq 1$. $||x|$ és $B(x)$ egész számok, ezért $||x| - B(x)$ is egész, ebből következik, hogy $||x| - B(x) = 0$, vagy 1 .

Mivel $B(x)$ páratlan, azért $||x| - B(x) = 0$, ha $|x|$ páratlan, és $||x| - B(x) = 1$, ha $|x|$ páros. Így $g(x) = 0$, ha $|x|$ páratlan, és $g(x) = 1$, ha $|x|$ páros.

- (b) Ha $\{x\} \neq 0$, akkor $0 - \{x\} \leq ||x| - B(x) \leq 1 - \{x\}$. $||x|$ és $B(x)$ egész számok, ezért $||x| - B(x)$ is egész, ebből következik, hogy $||x| - B(x) = 0$. Így

$$g(x) = ||x| + \{x\} - B(x)| = |0 + \{x\}| = \{x\}.$$

- (2) Ha $||x| + \{x\} - B(x) < 0$, akkor $g(x) = ||x| + \{x\} - B(x)| \leq 1$ miatt $0 < B(x) - ||x| - \{x\} \leq 1$. Ekkor tehát $\{x\} < B(x) - ||x| \leq 1 + \{x\}$.

- (a) Ha $\{x\} = 0$, akkor $0 < B(x) - ||x| \leq 1$. $||x|$ és $B(x)$ egész számok, ezért $B(x) - ||x|$ is egész, ebből következik, hogy $B(x) - ||x| = 1$; így $g(x) = 1$.

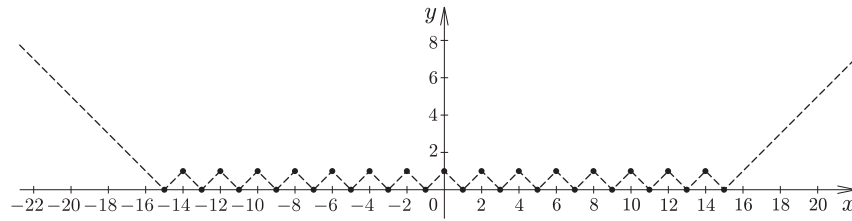
- (b) Ha $\{x\} \neq 0$, akkor $\{x\} \leq B(x) - ||x| \leq 1 + \{x\}$. $||x|$ és $B(x)$ egész számok, ezért $B(x) - ||x|$ is egész, ebből következik, hogy $B(x) - ||x| = 1$. Így

$$g(x) = ||x| + \{x\} - B(x)| = B(x) - ||x| - \{x\} = 1 - \{x\}.$$

Az (1a), (1b), (2a), (2b) esetek eredményeit $f(x)$ -re és $g(x)$ -re megnézve látjuk, hogy minden esetben $f(x) = g(x)$. (Mindegyik eset bizonyításakor felhasználtuk az előző eredményt, miszerint $f(x) \leq 1$ és $g(x) \leq 1$.)

2. A továbbiakban azt mutatjuk meg, hogy ha $|x| < 2^{n+1} - 1$, akkor $f(x)$ és $g(x)$ grafikonja egyes „fogakból” áll.

Az előbbi esetszétválasztásnál láttuk, hogy ha $|x|$ egész és páros, akkor $f(x) = g(x) = 1$, ha $|x|$ egész és páratlan, akkor $f(x) = g(x) = 0$. Ezeket a pontokat, vagyis az egész értékeknek megfelelőket ennek alapján már ábrázolhatjuk (2. ábra).



2. ábra

E pontokat csak az előbb részeredményekként kapott $1 - \{|x|\}$ vagy $\{|x|\}$ függvények grafikonrészletei „köthetik össze”. Mivel ha $|x|$ egész, akkor felváltva páros, vagy páratlan, így az $1 - \{|x|\}$ és $\{|x|\}$ függvények grafikonrészletei is felváltva jelennek meg, hiszen két szomszédos pontot egyféleképpen köthetünk össze ezen grafikonrészletek segítségével, egymáshoz viszonyított helyzetük szerint. Tehát $f(x) = g(x)$ egyes fogakból áll.

3. Most, hogy minden $k(x) = ||\dots||x| - 2^n| - 2^{n-1}| - \dots| - 2| - 1|$ függvényre láttuk, hogy a görbéje hogyan néz ki, további általánosítás lehetősége jelenik meg.

Mi a feltétele annak, hogy egy $h(x) = ||\dots||x| - a_n| - a_{n-1}| - \dots| - a_0|$ alakú függvény (ahol az a_i számok pozitív egészek) grafikonja csak egyes fogakból álljon? Megmutatjuk, hogy ennek szükséges és elégséges feltétele az, hogy minden $0 \leq m \leq n$ -re

$$a_m - 1 \leq \sum_{i=0}^{m-1} a_i, \quad \text{azaz} \quad a_m - \sum_{i=0}^{m-1} a_i \leq 1$$

teljesüljön. A bizonyítást ismét kétfelé bontjuk aszerint, hogy $|x| > \sum_{i=0}^n a_i$ vagy $|x| \leq \sum_{i=0}^n a_i$.

Az első esetben könnyen láthatjuk, hogy $h(x) = |x| - \sum_{i=0}^n a_i$.

Tegyük föl ezután, hogy $|x| \leq \sum_{i=0}^n a_i$. Az előző feladathoz hasonlóan itt is teljes indukcióval bizonyítunk, azonban az indukciós feltétel kicsit változik. Hogy lássuk, miért változik, először nézzük meg, hogyan alakul $h(x)$ maximális értéke: $||x| - a_n|$ akkor lehet maximális, ha $|x| - a_n$ a legnagyobb vagy a legkisebb.

Az $|x|$ -re érvényes feltétel miatt nyilván $||x| - a_n|$ akkor maximális, ha $|x| = 0$, vagy ha $|x| = \sum_{i=0}^n a_i$. Amennyiben

$|x| = 0$, akkor $||x| - a_n| = a_n$, ha pedig $|x| = \sum_{i=0}^n a_i$, akkor $||x| - a_n| = \sum_{i=0}^n a_i - a_n$. Tehát

$$0 \leq ||x| - a_n| \leq a_n, \quad \text{vagy} \quad 0 \leq ||x| - a_n| \leq \sum_{i=0}^n a_i - a_n.$$

Ugyanígy tovább:

Ha $||x| - a_n| - a_{n-1} < 0$, akkor $||x| - a_n| - a_{n-1}| \leq a_{n-1}$.

Ha $||x| - a_n| - a_{n-1} \geq 0$, akkor

ha $||x| - a_n| \leq \sum_{i=0}^n a_i - a_n$, akkor

$$||x| - a_n| - a_{n-1}| \leq \sum_{i=0}^n a_i - a_n - a_{n-1},$$

ha $||x| - a_n| \leq a_n$, akkor $||x| - a_n| - a_{n-1}| \leq a_n - a_{n-1}$.

Az indukciós lépés a következő lesz. Ha teljesül, hogy

$$\begin{aligned} ||\dots||x| - a_n| - a_{n-1}| - \dots| - a_{k+1}| &\leq a_{k+1}, \\ \text{vagy} &\leq a_{k+2} - a_{k+1}, \\ \text{vagy} &\leq a_{k+3} - a_{k+2} - a_{k+1}, \\ &\vdots \\ \text{vagy} &\leq \sum_{i=0}^n a_i - a_n - a_{n-1} - \dots - a_{k+1}, \end{aligned}$$

akkor fennáll, hogy

$$\begin{aligned}
 ||\dots|||x| - a_n| - a_{n-1}| - \dots| - a_k| &\leq a_k, \\
 \text{vagy} &\leq a_{k+1} - a_k, \\
 \text{vagy} &\leq a_{k+2} - a_{k+1} - a_k, \\
 &\vdots \\
 \text{vagy} &\leq \sum_{i=0}^n a_i - a_n - a_{n-1} - \dots - a_k.
 \end{aligned}$$

Tehát $h(x)$ -re teljesül, hogy

$$\begin{aligned}
 h(x) &\leq a_0, \\
 \text{vagy} &\leq a_1 - a_0, \\
 \text{vagy} &\leq a_2 - a_1 - a_0, \\
 &\vdots \\
 \text{vagy} &\leq \sum_{i=0}^n a_i - a_n - a_{n-1} - \dots - a_0.
 \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy $h(x) \leq 1$ igaz legyen, annak kell teljesülnie, hogy

$$\begin{aligned}
 h(x) &\leq a_0 \leq 1, \\
 \text{vagy} &\leq a_1 - a_0 \leq 1, \\
 \text{vagy} &\leq a_2 - a_1 - a_0 \leq 1, \\
 &\vdots \\
 \text{vagy} &\leq \sum_{i=0}^n a_i - a_n - a_{n-1} - \dots - a_0 \leq 1.
 \end{aligned}$$

Vagyis teljesülnie kell annak – és ez a feltétel egyben elégséges is – hogy

$$\begin{aligned}
 a_0 &\leq 1, \\
 a_1 - a_0 &\leq 1, \\
 a_2 - a_1 - a_0 &\leq 1, \\
 &\vdots \\
 \sum_{i=0}^n a_i - a_n - a_{n-1} - \dots - a_0 &\leq 1.
 \end{aligned}$$

Ez pedig éppen a korábban kimondott bizonyítandó feltétel, vagyis hogy

$$a_m - \sum_{i=0}^{m-1} a_i \leq 1.$$

Tehát $h(x)$ valóban legfeljebb 1.

Ekkor $h(x)$ -et $h(x) = ||[x]| + \{|x|\} - C(x)|$ alakba átírva a bizonyítás a második feladatban látottak szerint fejeződik be. Tehát ha $a_m - \sum_{i=0}^{m-1} a_i \leq 1$ (ahol $0 \leq m \leq n$) teljesül, akkor $h(x)$ csak egyes fogakból áll. Mi következik még ebből a feltételből? Nézzük $h(x)$ utolsó, nem nulla (a_0) tagját. Erre a feltétel szerint igaz, hogy $a_0 \leq 1$. Tehát $a_0 = 1$. Ekkor viszont $a_1 \leq 1 + a_0 = 2$.

Ugyanígy, ha $a_k \leq 1 + a_{k-1} + a_{k-2} + \dots + a_0$, ahol $a_i = 2^i$ ($0 \leq i \leq k-1$), akkor $a_k \leq 1 + 2^k - 1 = 2^k$, vagyis $h(x)$ k -adik tagja nem lehet nagyobb 2^k -nál. Ebből látszik, hogy az első feladatban szereplő $f(x)$ függvény paraméterei a megengedett korlátozásokhoz képest a lehető leggyorsabban növekednek, hiszen ott minden k -ra $a_k = 2^k$.

Befejezésül és az előbbieik alkalmazásaként egy, a kiindulási példához hasonló feladat:

Igazoljuk, hogy

$$\left| \dots ||x| - 13| - 8| - 5| - 3| - 2| - 1| - 1 \right| = \left| \dots ||x| - \underbrace{1| - 1| - \dots| - 1|}_{33 \text{ db } 1\text{-es}} \right|.$$

Itt a paraméterek a Fibonacci-számok $\{f_k \mid f_0 = f_1 = 1, f_{m+1} = f_m + f_{m-1}\}$ sorozatának első hét eleme. Ismert, hogy $f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{m-1} = f_{m+1} - f_1 = f_{m+1} - 1$, ezért minden m -re

$$f_m - \sum_{i=0}^{m-1} f_i = f_m - f_{m+1} + 1 = 1 - f_{m-1} \leq 1.$$

Tulassay Zsolt

Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn.

9. évf., mat. tagozat