

Emelt szintű gyakorló feladatsor

Gyanó Éva
Budapest

I. rész

1. a) Állítsuk növekvő sorrendbe a következő számokat:

$$A = \left(2011^{\sin \frac{81\pi}{4}}\right)^{\log_2 \log_3 \log_5 125};$$

$$B = \left(\sin \frac{81\pi}{4} + \cos \frac{81\pi}{4}\right)^2;$$

$$C = \log_{13-\sqrt{168}}(13 + \sqrt{168}).$$

b) Igazoljuk, hogy az alábbi kifejezés értéke egész szám:

$$\sqrt[3]{2 - 27 \cdot \sqrt[3]{25} + 9 \cdot \sqrt[3]{25^2} + \sqrt[3]{25}}.$$

(12 pont)

2. Egy hajó a folyón egyenletes sebességgel a vízfolyás irányában haladva egy bizonyos utat 5 óra alatt, ugyanezt az utat a vízfolyással szemben haladva 5 óra 24 perc alatt teszi meg. Mennyi idő alatt teszi meg ezt az utat egy tutaj, amely a víz sebességével halad?

(12 pont)

3. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 28 és 45. Mennyi a beírható és a köré írható körök középpontjainak távolsága?

(13 pont)

4. Az $f(x) = x^2 + ax + b$ ($a \neq 0$; $b \neq 0$; $a \neq b$; $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$) függvényről tudjuk, hogy az $(a + b)$ helyen felvett helyettesítési értéke $(a - 4b)$, az $(a - b)$ helyen pedig $(a - 7b)$.

Adjuk meg az $f(x)$ hozzárendelési szabályát.

(14 pont)

II. rész

5. Egy r sugarú gömb köré egyenlő oldalú kúpot írunk, a gömb középpontján át a kúp alapjával párhuzamos síkot fektetünk. (Az egyenlő oldalú kúp átmérőjének hossza egyenlő az alkotó hosszával.) Vegyük ki a keletkezett csonkakúpból a benne elhelyezkedő félgömböt.

Számítsuk ki az így visszamaradó test felszínét és térfogatát.

(16 pont)

6. Milyen α értékek mellett lesz az alábbi három kifejezés (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat egymást követő eleme: $\lg \sin 2\alpha$; $\lg \sin 4\alpha$; $\lg \cos 2\alpha$?

(16 pont)

7. Az $f(x) = 3x^2 + b$ függvény grafikonjának az $x = 2$ helyhez tartozó érintője áthalad az origón.

a) Hol metszi ez az érintő a parabola vezéregyenesét?

b) Számítsuk ki a függvénygörbe, az érintő, és az y tengely által közbezárt terület nagyságát.

(16 pont)

8. A tojásokat 15 db-os dobozokban árulják. Minden tojás $\frac{1}{15}$ valószínűséggel sérült.

a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy doboz csak ép tojásokat tartalmaz?

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy doboz kettő vagy több törött tojást tartalmaz?

c) A boltban tízen vesznek egy-egy doboz tojást. Mekkora a valószínűsége annak, hogy közülük ketten visznek haza csupa ép tojást tartalmazó dobozt?

(16 pont)

9. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$\left| \frac{x^2 + y^2}{x + y} \right| = 1.$$

(16 pont)