

I. rész

1. Egy általános iskolában a farsangi tombolán összesen 210 tombolaszelvényt adtak el, ezek közül hármat vett meg Bori. A sorsoláson összesen 20 nyertes szelvényt húznak ki, melyek közül az utolsónak a tulajdonosa kapja meg a főnyereményt.

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy

- a) Bori legalább az egyik szelvénnel nyer;
- b) Bori mindhárom szelvénnel nyer;
- c) Bori nyeri a főnyereményt.

(12 pont)

Megoldás. a) Számítsuk ki a komplementer esemény valószínűségét, s azt 1-ből levonva kapjuk a keresett valószínűséget. Ha Bori nem nyert, akkor mind a 20 nyertes szelvény abból a 207-ből került ki, amit nem ő vásárolt meg.

$$\begin{aligned} P(\text{Bori nyer}) &= 1 - P(\text{Bori nem nyer}) = 1 - \frac{\binom{207}{20}}{\binom{210}{20}} = 1 - \frac{\frac{207 \cdot 206 \cdot \dots \cdot 188}{20!}}{\frac{210 \cdot 209 \cdot \dots \cdot 191}{20!}} = \\ &= 1 - \frac{207 \cdot 206 \cdot \dots \cdot 188}{210 \cdot 209 \cdot \dots \cdot 191} = 1 - \frac{190 \cdot 189 \cdot 188}{210 \cdot 209 \cdot 208} \approx 0,2605. \end{aligned}$$

b) Ha Bori mindhárom szelvényével nyert, akkor a többi 207 szelvény közül 17-et húztak ki:

$$\begin{aligned} P(\text{Bori mindhárommal nyer}) &= \frac{\binom{3}{3} \binom{207}{17}}{\binom{210}{20}} = \frac{\frac{207 \cdot 206 \cdot \dots \cdot 191}{17!}}{\frac{210 \cdot 209 \cdot \dots \cdot 191}{20!}} = \\ &= \frac{207 \cdot 206 \cdot \dots \cdot 191}{210 \cdot 209 \cdot \dots \cdot 191} \cdot \frac{20!}{17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{210 \cdot 209 \cdot 208} \approx 0,00075. \end{aligned}$$

c) A 210 eladott szelvény bármelyike egyenlő valószínűséggel nyeri a főnyereményt, ezek közül három darab Borié, ezért:

$$P(\text{Bori nyeri a főnyereményt}) = \frac{3}{210} \approx 0,014.$$

2. Legyen P olyan pont a derékszögű koordináta-rendszerben, hogy a P -ből az $x^2 + y^2 = 6y - 6$ és az $x^2 + y^2 = 2x$ egyenletű körökhöz húzott érintőknek P -től az érintési pontokig terjedő szakaszai mind ugyanakkorák. Igazoljuk, hogy az említett tulajdonsággal rendelkező P pontok halmaza egy egyenes. Írjuk fel ennek az egyenesnek az egyenletét.

(13 pont)

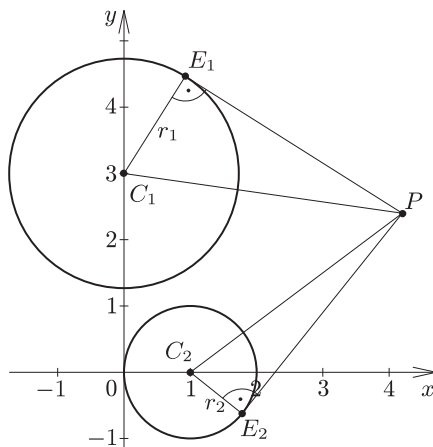
Megoldás. Alakítsuk át a körök egyenletét:

$x^2 + (y - 3)^2 = 3$, tehát az első kör középpontja a $C_1(0; 3)$ pont, sugara pedig $r_1 = \sqrt{3}$.

$(x - 1)^2 + y^2 = 1$, tehát a második kör középpontja a $C_2(1; 0)$ pont, sugara pedig $r_2 = 1$.

Ha egy külső P pontból érintőt húzunk egy körhöz, akkor a kör középpontja, az érintési pont és a P pont egy (az érintési pontnál) derékszögű háromszöget alkot.

Egy-egy érintési pontot a két körön E_1 -gyel, illetve E_2 -vel jelölve: $PE_1 = PE_2$, s mivel $PE_1 = \sqrt{PC_1^2 - r_1^2}$ és $PE_2 = \sqrt{PC_2^2 - r_2^2}$, azért $PC_1^2 - r_1^2 = PC_2^2 - r_2^2$.



A $P(x; y)$ koordinátájú pont távolsága a körök középpontjaitól:

$$PC_1 = \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2}, \quad \text{illetve} \quad PC_2 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}.$$

Ezeket az előbb kapott egyenletbe visszairva: $x^2 + (y-3)^2 - 3 = (x-1)^2 + y^2 - 1$. Ebből rendezés után a másodfokú tagok kiesnek, és kapjuk: $x - 3y + 3 = 0$. A keresett tulajdonságú pontok tehát ezen az egyenesen helyezkednek el, és ennek az egyenesnek valóban minden pontja megfelel, mert a fenti gondolatmenet lépései megfordíthatók.

Ehhez csak azt kell ellenőrizni, hogy $PC_i^2 - r_i^2 \geq 0$, ez pedig teljesül az egyenes minden pontjára, hiszen például $PC_1^2 - r_1^2 = (3y-3)^2 + (y-3)^2 - 3 = 10y^2 - 24y + 15$, ami mindig pozitív, mivel az utóbbi kifejezés diszkriminánsa negatív.

Megjegyzés. A kapott egyenes a két körnek az úgynevezett hatványvonala, melynek egyenlete a két kör egyenletének különbsége, s mivel a két körnek nincs közös pontja, ezért a hatványvonalnak sincs a körökkel közös pontja, tehát az egyenes minden pontjából valóban húzható érintő a körökhöz.

3. Határozzuk meg az

$$f(x) = 3x^2 + px + q$$

hozzárendeléssel megadott függvényben a p és a q paraméterek értékét, ha

$$\int_1^3 f(x) dx = 13 \quad \text{és} \quad \int_2^4 f(x) dx = 35. \quad (12 \text{ pont})$$

(12 pont)

Megoldás. Az integrálok értékéből egy-egy egyenletet írhatunk fel a két ismeretlen paraméterre:

$$\begin{aligned} \int_1^3 (3x^2 + px + q) dx &= \left[x^3 + \frac{px^2}{2} + qx \right]_1^3 = (27 + 4,5p + 3q) - (1 + 0,5p + q) = \\ &= 26 + 4p + 2q = 13, \end{aligned}$$

azaz $4p + 2q = -13$.

$$\begin{aligned} \int_2^4 (3x^2 + px + q) dx &= \left[x^3 + \frac{px^2}{2} + qx \right]_2^4 = (64 + 8p + 4q) - (8 + 2p + 2q) = \\ &= 56 + 6p + 2q = 35, \end{aligned}$$

azaz $6p + 2q = -21$. A két egyenletből álló egyenletrendszert megoldjuk, a megoldás: $p = -4$, $q = 1,5$, a keresett függvény hozzárendelési szabálya: $f(x) = 3x^2 - 4x + 1,5$.

4. a) Határozzuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$x \mapsto \frac{\sin 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{6}) - \cos(x - \frac{\pi}{6})}$$

hozzárendeléssel megadott függvény értelmezhető és ezen az értelmezési tartományon adjuk meg a függvény értékészletét. Ábrázoljuk a függvényt a $[-2\pi; 2\pi]$ intervallumon.

b) Oldjuk meg a

$$\frac{\sin 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{6}) - \cos(x - \frac{\pi}{6})} = 2 \cos 2x$$

egyenletet a valós számok halmazán.

(14 pont)

Megoldás. a) Átalakítjuk a törtekifejezés nevezőjét:

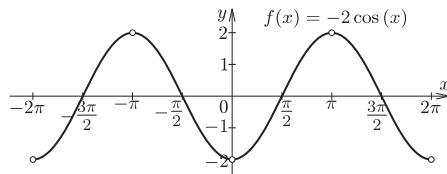
$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6} - \left(\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin x \sin \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= -2 \sin x \cdot \frac{1}{2} = -\sin x. \end{aligned}$$

A függvény hozzárendelése tehát:

$$x \mapsto \frac{2 \sin x \cos x}{-\sin x} = -2 \cos x,$$

ahol $\sin x \neq 0$, tehát a függvény értelmezési tartománya:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$



A függvény értékkészlete: $R_f =]-2; 2[$.

Az *ábra* mutatja a kért intervallumon a függvény képét.

b) Felhasználva az előző eredményt az egyenlet az ismert trigonometrikus azonosságok alkalmazásával az alábbiak szerint alakítható:

$$\begin{aligned} -\cos x &= \cos 2x && (\text{ahol } \sin x \neq 0), \\ -\cos x &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x), \\ 0 &= 2 \cos^2 x + \cos x - 1. \end{aligned}$$

Ez az egyenlet $\cos x$ -ben másodfokú, megoldásai: 0,5 és -1 .

Az első esetben $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), a második esetben viszont $\sin x = 0$ lenne, ami ellentmond a feltételnek, így onnan nem kapunk megoldást.

Átalakításaink ekvivalensek voltak.

II. rész

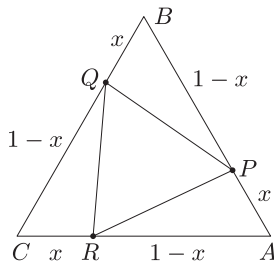
5. Egy egységnyi oldalú szabályos háromszög oldalait (azonos körüljárási irány szerint) felosztottuk $m : n$ arányban, és az osztópontokat összekötve újabb háromszöget kaptunk. Ezt az eljárást gondolatban végtelen sokszor megismételjük a kapott háromszögek mindegyikével. A keletkezett háromszögek területének összege az eredeti háromszög területének $\frac{19}{30}$ -szorososa. Határozzuk meg az $m : n$ arányt. (16 pont)

Megoldás. Az ABC szabályos háromszög egységnyi AB , BC és CA oldalán legyen rendre a P , Q és R pont úgy, hogy $AP = BQ = CR = x$ és $PB = QC = RA = 1 - x$. Vagyis $m : n = x : (1 - x)$.

Nyilván a PQR háromszög is szabályos, hiszen APR , BQP és CRQ háromszögek egybevágóak (két oldaluk és a két oldal által közbezárt szögük megegyezik),

ezért $RP = PQ = QR$.

Ebből következik, hogy az eljárás folyamán kapott valamennyi háromszög szabályos lesz, továbbá hasonlósági megfontolások miatt (mivel minden esetben $m : n$ arányban osztjuk a háromszögek oldalait) a keletkezett háromszögek oldalai egy mértani sorozatot alkotnak, melynek hányadosa $q = \frac{PQ}{AB}$.



Hasonló sokszögek területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, ezért a keletkezett háromszögek területei egy olyan mértani sorozatot alkotnak, melynek hányadosa $q^2 = \left(\frac{PQ}{AB}\right)^2 < 1$.

Tekintsük e mértani sorozat részletösszegeinek sorozatát egy végtelen mértani sornak. Tekintsük első elemnek az eredeti háromszöget, így a végtelen mértani sor összege az eredeti háromszög területének, tehát a sorozat első elemének a $\frac{49}{30}$ -szorososa.

$$S = \frac{a_1}{1 - q^2} = \frac{49}{30} a_1,$$

amiből kapjuk, hogy $q^2 = \frac{19}{49}$, azaz $q = \frac{\sqrt{19}}{7}$ (hiszen a $q < 0$ ebben az esetben nem értelmezhető).

Minden berajzolt háromszög területe tehát $\frac{19}{49}$ -szerese az előző háromszög területének, oldalhosszúsága pedig $\frac{\sqrt{19}}{7}$ -szerese a megelőző háromszög oldalhosszúságának. Ezek szerint: $PR = \frac{\sqrt{19}}{7}$.

Az APR háromszögben írjuk fel a koszinusztételt:

$$\left(\frac{\sqrt{19}}{7}\right)^2 = x^2 + (1-x)^2 - 2x(1-x)\cos 60^\circ.$$

Elvégezzük a műveleteket, beszorzunk és nullára rendezünk: $0 = 49x^2 - 49x + 10$. Az egyenlet gyökei: $x = \frac{2}{7}$ és $x = \frac{5}{7}$.

Tehát $m : n = x : (1-x) = 2 : 5$ (vagy $5 : 2$).

6. a) Határozzuk meg az x értékét úgy, hogy $16 \cdot 25^x$, $133 \cdot 10^x$ és $250 \cdot 4^x$ (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat egymást követő elemei legyenek.

b) Egy számtani sorozat első eleme 16, differenciája 117. A sorozat első n elemének összege 371 000. Határozzuk meg n értékét. (16 pont)

Megoldás. a) A feltételek szerint: $133 \cdot 10^x - 16 \cdot 25^x = 250 \cdot 4^x - 133 \cdot 10^x$. Nullára rendezve: $0 = 16 \cdot 25^x - 266 \cdot 10^x + 250 \cdot 4^x$.

Osszuk végig az egyenletet (a biztosan pozitív) 4^x -nel:

$$0 = 16 \cdot \frac{25^x}{4^x} - 266 \cdot \frac{10^x}{4^x} + 250 = 16 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 266 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x + 250.$$

Ez az egyenlet $\left(\frac{5}{2}\right)^x$ -ben másodfokú, megoldásai: $\frac{125}{8}$ és 1.

Az első esetben az $x = 3$, a másodikban az $x = 0$ adódik.

Mindkét esetben valóban számtani sorozatot kapunk (250 000; 133 000; 16 000, illetve 16; 133; 250).

b) A számtani sorozat összegképlete szerint:

$$S_n = \frac{[2a_1 + (n-1) \cdot d] \cdot n}{2} = \frac{[32 + 117(n-1)] \cdot n}{2} = 371\,000.$$

Kettővel beszorozva és a műveleteket elvégezve, majd nullára rendezve:

$$117n^2 - 85n - 742\,000 = 0.$$

Ennek a pozitív megoldása az $n_1 = 80$ (a másik gyök negatív: $n_2 = -\frac{9275}{117} \approx -79,27$).

Tehát a sorozat első 80 tagjának az összege 371 000.

7. Egy ötoldalú szabályos gúla minden éle egyenlő.

a) Mekkora szöget zárnak be a szomszédos oldallapok?

b) Mekkora szöget zár be egy oldalél az alaplappal?

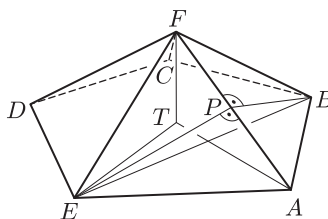
c) Egy ólomból készített papírnehézék alakja éppen ilyen szabályos ötoldalú gúla, melynek minden éle 1,5 cm hosszúságú. Hány darab papírnehézék önthető 1,5 kg ólomból, ha a művelet során a tapasztalatok szerint 9% veszteséggel kell számolnunk? (Az ólom sűrűsége 11,3 g/cm³.)

(16 pont)

Megoldás. a) Legyen a gúla alaplappja az $ABCDE$ szabályos ötszög, csúcsa az F pont, oldalélének hossza a . Két oldallap szögét a metszésvonalukra (tehát a közös élre) a két lap síkjában állított merőlegesek szöge határozza meg.

Az AF élre annak P felezőpontjában az AFE , illetve az ABF lapok síkjában állított merőlegesek éppen az AFE és ABF háromszögek magasságai, hiszen az oldallapok szabályos háromszögek, ezért $PE = PB = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

EAB szög a szabályos ötszög egy belső szöge, tehát 108° -os. Az EAB háromszögben írjuk fel a koszinusztételt a BE oldalra:



$$BE^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos 108^\circ \approx 2,618 a^2, \quad \text{ebből} \quad BE \approx 1,618 a.$$

(Ismert, hogy a szabályos ötszög átlója és oldala az aranymetszés arányában áll egymással, vagyis a $BE = \frac{\sqrt{5}+1}{2}a$ pontos értékkel is számolhatunk.)

EBP háromszögben felírva a koszinusztételt a keresett BPE szögre:

$$\cos BPE \triangleleft = \frac{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}a\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \approx -0,7454,$$

ahonnan $BPE \triangleleft \approx 138,19^\circ$.

Tehát a két szomszédos oldallal által bezárt szög kb. $138,19^\circ$.

b) A gúla csúcsának az alaplapon vett merőleges vetülete legyen T . A keresett szög ekkor pl. a TAF szög.

Az AT szakasz hosszát kiszámolhatjuk az EAT egyenlőszárú háromszögből, melynek alapon fekvő szögei 54 fokosak:

$$\frac{\frac{a}{2}}{AT} = \cos 54^\circ, \quad \text{ahonnan} \quad AT = \frac{a}{2 \cos 54^\circ} \approx 0,8507 a,$$

$$\cos TAF \triangleleft = \frac{AT}{AF} = \frac{0,8507 a}{a} = 0,8507,$$

ahonnan $FAT \triangleleft \approx 31,71^\circ$. Egy oldalélnak az alaplappal bezárt szöge tehát kb. $31,71^\circ$.

c) A gúla alaplapja egy szabályos ötszög, mely a középpontjából a csúcsokba húzott szakaszokkal öt darab egybevágó egyenlőszárú háromszögre bontható. Ezek szára $(0,8507 a)$ és szaruk által bezárt szöge ismert (72°), területük a trigonometrikus területképlettel meghatározható.

A gúla magassága az AFT háromszögből Pitagorasz-tétellel meghatározható:

$$m = TF = \sqrt{AF^2 - AT^2} \approx \sqrt{a^2 - (0,8507a)^2} \approx 0,5257 a.$$

Ha $a = 1,5$ cm, akkor egy ilyen gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{5 \cdot \frac{AT^2 \cdot \sin 72^\circ}{2} \cdot TF}{3} \approx \frac{5 \cdot \sin 72^\circ \cdot 0,8507^2 \cdot 0,5257 \cdot a^3}{6} \approx 1,02 \text{ cm}^3.$$

$1,5$ kg = 1500 g ólom térfogata: $V = \frac{1500}{11,3} \approx 132,74 \text{ cm}^3$. Kilenc százalék veszteséggel számolva a hasznos térfogat $132,74 \cdot 0,91 = 120,8 \text{ cm}^3$. Az ekkora térfogatú ólomból elkészíthető nehezekek száma legfeljebb $\frac{120,8}{1,02} \approx 118,4$, azaz 118 darab papírnehézék készíthető $1,5$ kg ólomból.

8. Bergengócia legnagyobb tavának négy üdülővárosát hajójáratokkal szeretnék összekötni. Minden járat közvetlenül két települést köt össze úgy, hogy közben harmadik várost nem érint (a járatok oda-vissza közlekednek). A hálózatban működő járatok száma 0-tól 6-ig bármennyi lehet.

a) *Hány különböző járáthálózat alakítható ki? (Két hálózat akkor különböző, ha van legalább egy olyan járat, mely az egyik hálózatban közlekedik, a másikban nem.)*

b) *Az összes lehetséges járáthálózat hányadrésze lesz összefüggő? (Egy hálózat akkor összefüggő, ha – szükség esetén átszállással – bármely városból bármely másik városba el lehet jutni.)*

c) *Takarékossági okokból végül úgy döntenek, hogy a lehető legkevesebb járatot indítják el ahhoz, hogy a hálózat még összefüggő legyen. Hány különböző járáthálózat alakítható így ki? (16 pont)*

Megoldás. a) A négy település közt $\binom{4}{2} = 6$ különböző járat indítható. Ezek mindegyike egymástól függetlenül vagy része a hálózatnak, vagy nem része, tehát $2^6 = 64$ különböző járáthálózat alakítható ki.

Megjegyzés. Ugyanezt az értéket kapjuk, ha a járatok száma szerint összegezzük a lehetséges hálózatokat:

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \dots + \binom{6}{6} = 64.$$

b) Tekintsük a hálózatot egy gráfnak, ahol a települések a pontok, a járatok pedig az élek. A lehetséges 4 pontú, összefüggő, egyszerű gráfokat keressük.

A 4 pontú gráfok közül minden legalább 4 élű biztosan összefüggő, ezek száma

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 22,$$

a legfeljebb 2 élűek pedig semmiképpen nem összefüggők. $\binom{6}{3} = 20$ db 3 élű gráf van, melyek közül azok nem összefüggők, amelyek 3 várost kötnek össze. Ezek száma 4 , azaz 16 db 3 élű összefüggő gráf van.

Az előbbi típusból 4 különböző van aszerint, hogy melyik pontból indul a 3 él.

A második típusnál a legelső pontot 4, a másodikikat 3, a harmadikat 2-féleképpen választhatjuk ki, de ugyanezt a gráfot kapjuk, ha a sort a másik végétől kezdjük el felsorolni. Így ezek száma $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12$.

A feltételeknek megfelelő összes lehetséges különböző járathálózat száma tehát $22 + 16 = 38$, azaz a hálózatok $\frac{38}{64} = \frac{19}{32}$ -ed része összefüggő.

c) A pontosan 3 élű hálózatok felelnek meg a feltételeknek, ezek száma (az előbbieik szerint): $4 + 12 = 16$.

9. *Murmur úr telkét a szomszéd telkétől egy 180 cm magas kerítés választja el. Milyen szögben kell a kerítéshez támasztani a 390 cm magas paravánját, ha azt szeretné, hogy az a szomszéd kertjére a lehető legnagyobb árnyékot vesse, feltéve, hogy a Nap éppen függőlegesen süt? Hány méterre nyúlik be a szomszéd telkére ez az árnyék? (16 pont)*

Megoldás. Válasszuk ismeretlennek a paraván és a kert vízszintes síkja által bezárt α szöget. A paraván által vetett teljes árnyék legyen d_1 , ebből Murmur úr kertjébe esik d_2 , ahol $\cos \alpha = \frac{d_1}{390}$ és $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{d_2}{180}$.

A szomszéd kertjére eső árnyékot megadó függvény tehát:

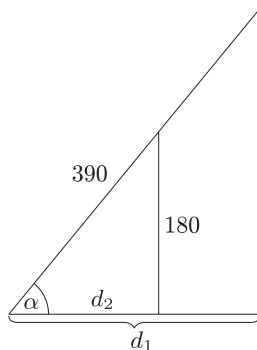
$$f(\alpha) = d_1 - d_2 = 390 \cos \alpha - 180 \operatorname{ctg} \alpha \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ).$$

Ennek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja nulla:

$$f'(\alpha) = -390 \sin \alpha + \frac{180}{\sin^2 \alpha} = 0,$$

azaz

$$\sin \alpha = \sqrt[3]{\frac{180}{390}} \approx 0,7728,$$



ahonnan $\alpha \approx 50,6^\circ$. Ekkor a szomszéd telkére $f(50,6^\circ) \approx 99,7$ cm-re, tehát kb. 1 méter mélyre nyúlik be az árnyék.

Az f második deriváltja

$$f''(\alpha) = -390 \cos \alpha - \frac{360 \cos \alpha}{\sin^3 \alpha},$$

s mivel $f''(50,6^\circ) < 0$, azért a talált érték valóban maximumhely, tehát $50,6^\circ$ -os szögben kell Murmur úrnak a kerítéshez támasztani a paravánját.