I. rész

1. *Egy általános iskolában a farsangi tombolán összesen 210 tombolaszelvényt adtak el, ezek közül hármat vett meg Bori. A sorsoláson összesen 20 nyertes szelvényt húznak ki, melyek közül az utolsónak a tulajdonosa kapja meg a főnyereményt.*
Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy
a) Bori legalább az egyik szelvénnyel nyer;
b) Bori mindhárom szelvénnyel nyer;
c) Bori nyeri a főnyereményt. (*12 pont*)

Megoldás. *a*) Számítsuk ki a komplementer esemény valószínűségét, s azt 1-ből levonva kapjuk a keresett valószínűséget. Ha Bori nem nyert, akkor mind a 20 nyertes szelvény abból a 207-ből került ki, amit nem ő vásárolt meg.

$$P(\text{Bori nyer}) = 1 - P(\text{Bori nem nyer}) = 1 - \frac{\binom{207}{20}}{\binom{210}{20}} = 1 - \frac{\frac{207\cdot 206\cdot\ldots\cdot 188}{20!}}{\frac{210\cdot 209\cdot\ldots\cdot 191}{20!}} =$$
$$= 1 - \frac{207\cdot 206\cdot\ldots\cdot 188}{210\cdot 209\cdot\ldots\cdot 191} = 1 - \frac{190\cdot 189\cdot 188}{210\cdot 209\cdot 208} \approx 0{,}2605.$$

b) Ha Bori mindhárom szelvényével nyert, akkor a többi 207 szelvény közül 17-et húztak ki:

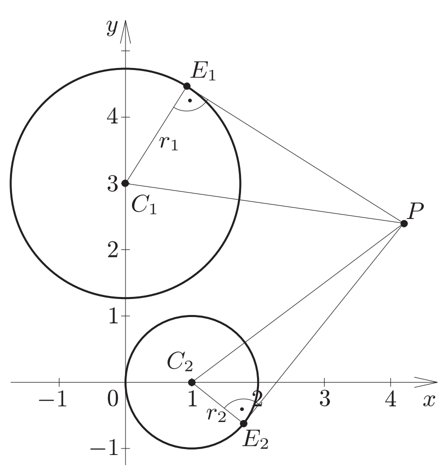
$$P(\text{Bori mindhárommal nyer}) = \frac{\binom{3}{3}\binom{207}{17}}{\binom{210}{20}} = \frac{\frac{207\cdot 206\cdot\ldots\cdot 191}{17!}}{\frac{210\cdot 209\cdot\ldots\cdot 191}{20!}} =$$
$$= \frac{207\cdot 206\cdot\ldots\cdot 191}{210\cdot 209\cdot\ldots\cdot 191}\cdot\frac{20!}{17!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{210\cdot 209\cdot 208} \approx 0{,}00075.$$

c) A 210 eladott szelvény bármelyike egyenlő valószínűséggel nyeri a főnyereményt, ezek közül három darab Borié, ezért:

$$P(\text{Bori nyeri a főnyereményt}) = \frac{3}{210} \approx 0{,}014.$$

2. *Legyen P olyan pont a derékszögű koordináta-rendszerben, hogy a P-ből az $x^2+y^2=6y-6$ és az $x^2+y^2=2x$ egyenletű körökhöz húzott érintőknek P-től az érintési pontokig terjedő szakaszai mind ugyanakkorák. Igazoljuk, hogy az említett tulajdonsággal rendelkező P pontok halmaza egy egyenes. Írjuk fel ennek az egyenesnek az egyenletét.*
(*13 pont*)

Megoldás. Alakítsuk át a körök egyenletét:
$x^2+(y-3)^2=3$, tehát az első kör középpontja a $C_1(0;3)$ pont, sugara pedig $r_1=\sqrt{3}$.
$(x-1)^2+y^2=1$, tehát a második kör középpontja a $C_2(1;0)$ pont, sugara pedig $r_2=1$.
Ha egy külső P pontból érintőt húzunk egy körhöz, akkor a kör középpontja, az érintési pont és a P pont egy (az érintési pontnál) derékszögű háromszöget alkot.
Egy-egy érintési pontot a két körön E_1-gyel, illetve E_2-vel jelölve: $PE_1 = PE_2$, s mivel $PE_1=\sqrt{PC_1^2-r_1^2}$ és $PE_2=\sqrt{PC_2^2-r_2^2}$, azért $PC_1^2-r_1^2=PC_2^2-r_2^2$.



A $P(x;y)$ koordinátájú pont távolsága a körök középpontjaitól:

$$PC_1=\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2},\quad \text{illetve}\quad PC_2=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}.$$

Ezeket az előbb kapott egyenletbe visszaírva: $x^2+(y-3)^2-3=(x-1)^2+y^2-1$. Ebből rendezés után a másodfokú tagok kiesnek, és kapjuk: $x-3y+3=0$. A keresett tulajdonságú pontok tehát ezen az egyenesen helyezkednek el, és ennek az egyenesnek valóban minden pontja megfelel, mert a fenti gondolatmenet lépései megfordíthatók.

Ehhez csak azt kell ellenőrizni, hogy $PC_i^2-r_i^2\ge 0$, ez pedig teljesül az egyenes minden pontjára, hiszen például $PC_1^2-r_1^2=(3y-3)^2+(y-3)^2-3=10y^2-24y+15$, ami mindig pozitív, mivel az utóbbi kifejezés diszkriminánsa negatív.

Megjegyzés. A kapott egyenes a két körnek az úgynevezett hatványvonala, melynek egyenlete a két kör egyenletének különbsége, s mivel a két körnek nincs közös pontja, ezért a hatványvonalnak sincs a körökkel közös pontja, tehát az egyenes minden pontjából valóban húzható érintő a körökhöz.

3. *Határozzuk meg az*

$$f(x)=3x^2+px+q$$

hozzárendeléssel megadott függvényben a p és a q paraméterek értékét, ha

$$\int_1^3 f(x)\,dx=13\quad \textit{és}\quad \int_2^4 f(x)\,dx=35. \qquad (\textit{12 pont})$$

(*12 pont*)

Megoldás. Az integrálok értékéből egy-egy egyenletet írhatunk fel a két ismeretlen paraméterre:

$$\int_1^3 (3x^2+px+q)\,dx=\left[x^3+\frac{px^2}{2}+qx\right]_1^3=(27+4{,}5p+3q)-(1+0{,}5p+q)=$$
$$=26+4p+2q=13,$$

azaz $4p+2q=-13$.

$$\int_2^4 (3x^2+px+q)\,dx=\left[x^3+\frac{px^2}{2}+qx\right]_2^4=(64+8p+4q)-(8+2p+2q)=$$
$$=56+6p+2q=35,$$

azaz $6p+2q=-21$. A két egyenletből álló egyenletrendszert megoldjuk, a megoldás: $p=-4$, $q=1{,}5$, a keresett függvény hozzárendelési szabálya: $f(x)=3x^2-4x+1{,}5$.

4. *a) Határozzuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az*

$$x\mapsto \frac{\sin 2x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$$

hozzárendeléssel megadott függvény értelmezhető és ezen az értelmezési tartományon adjuk meg a függvény értékkészletét. Ábrázoljuk a függvényt a $[-2\pi;2\pi]$ intervallumon.

b) Oldjuk meg a

$$\frac{\sin 2x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=2\cos 2x$$

egyenletet a valós számok halmazán. (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Átalakítjuk a törtkifejezés nevezőjét:

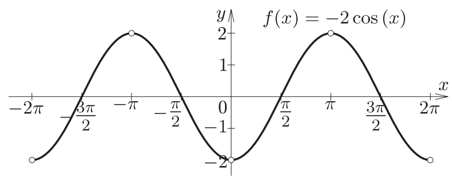
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}-\left(\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}\right)=$$
$$=-2\sin x\cdot\frac{1}{2}=-\sin x.$$

A függvény hozzárendelése tehát:

$$x\mapsto\frac{2\sin x\cos x}{-\sin x}=-2\cos x,$$

ahol $\sin x\ne 0$, tehát a függvény értelmezési tartománya:

$$D_f=\mathbb{R}\backslash\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}.$$



A függvény értékkészlete: $R_f =]-2;2[$.

Az *ábra* mutatja a kért intervallumon a függvény képét.

b) Felhasználva az előző eredményt az egyenlet az ismert trigonometrikus azonosságok alkalmazásával az alábbiak szerint alakítható:

$$-\cos x = \cos 2x \qquad (\text{ahol } \sin x \neq 0),$$
$$-\cos x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right),$$
$$0 = 2\cos^2 x + \cos x - 1.$$

Ez az egyenlet $\cos x$-ben másodfokú, megoldásai: 0,5 és -1.

Az első esetben $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, a második esetben viszont $\sin x = 0$ lenne, ami ellentmond a feltételnek, így onnan nem kapunk megoldást.

Átalakításaink ekvivalensek voltak.

II. rész

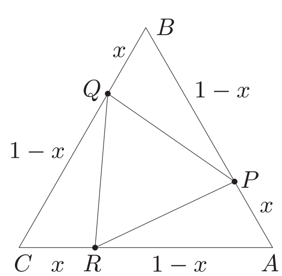
5. *Egy egységnyi oldalú szabályos háromszög oldalait (azonos körüljárási irány szerint) felosztottuk $m:n$ arányban, és az osztópontokat összekötve újabb háromszöget kaptunk. Ezt az eljárást gondolatban végtelen sokszor megismételjük a kapott háromszögek mindegyikével. A keletkezett háromszögek területének összege az eredeti háromszög területének $\frac{19}{30}$-szorosa. Határozzuk meg az $m:n$ arányt.* (*16 pont*)

Megoldás. Az ABC szabályos háromszög egységnyi AB, BC és CA oldalán legyen rendre a P, Q és R pont úgy, hogy $AP = BQ = CR = x$ és $PB = QC = RA = 1 - x$. Vagyis $m:n = x:(1-x)$.

Nyilván a PQR háromszög is szabályos, hiszen APR, BQP és CRQ háromszögek egybevágóak (két oldaluk és a két oldal által közbezárt szögük megegyezik),

ezért $RP = PQ = QR$.

Ebből következik, hogy az eljárás folyamán kapott valamennyi háromszög szabályos lesz, továbbá hasonlósági megfontolások miatt (mivel minden esetben $m:n$ arányban osztjuk a háromszögek oldalait) a keletkezett háromszögek oldalai egy mértani sorozatot alkotnak, melynek hányadosa $q = \frac{PQ}{AB}$.



Hasonló sokszögek területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, ezért a keletkezett háromszögek területei egy olyan mértani sorozatot alkotnak, melynek hányadosa $q^2 = \left(\frac{PQ}{AB}\right)^2 < 1$.

Tekintsük e mértani sorozat részletösszegeinek sorozatát egy végtelen mértani sornak. Tekintsük első elemnek az eredeti háromszöget, így a végtelen mértani sor összege az eredeti háromszög területének, tehát a sorozat első elemének a $\frac{49}{30}$-szorosa.

$$S = \frac{a_1}{1-q^2} = \frac{49}{30}a_1,$$

amiből kapjuk, hogy $q^2 = \frac{19}{49}$, azaz $q = \frac{\sqrt{19}}{7}$ (hiszen a $q < 0$ ebben az esetben nem értelmezhető).

Minden berajzolt háromszög területe tehát $\frac{19}{49}$-szerese az előző háromszög területének, oldalhosszúsága pedig $\frac{\sqrt{19}}{7}$-szerese a megelőző háromszög oldalhosszúságának. Ezek szerint: $PR = \frac{\sqrt{19}}{7}$.

Az APR háromszögben írjuk fel a koszinusztételt:

$$\left(\frac{\sqrt{19}}{7}\right)^2 = x^2 + (1-x)^2 - 2x(1-x)\cos 60°.$$

Elvégezzük a műveleteket, beszorzunk és nullára rendezünk: $0 = 49x^2 - 49x + 10$. Az egyenlet gyökei: $x = \frac{2}{7}$ és $x = \frac{5}{7}$.

Tehát $m : n = x : (1-x) = 2 : 5$ (vagy $5 : 2$).

6. *a) Határozzuk meg az x értékét úgy, hogy $16 \cdot 25^x$, $133 \cdot 10^x$ és $250 \cdot 4^x$ (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat egymást követő elemei legyenek.*

b) Egy számtani sorozat első eleme 16, differenciája 117. A sorozat első n elemének összege 371 000. Határozzuk meg n értékét. (*16 pont*)

Megoldás. *a)* A feltételek szerint: $133 \cdot 10^x - 16 \cdot 25^x = 250 \cdot 4^x - 133 \cdot 10^x$. Nullára rendezve: $0 = 16 \cdot 25^x - 266 \cdot 10^x + 250 \cdot 4^x$.

Osszuk végig az egyenletet (a biztosan pozitív) 4^x-nel:

$$0 = 16 \cdot \frac{25^x}{4^x} - 266 \cdot \frac{10^x}{4^x} + 250 = 16 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 266 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x + 250.$$

Ez az egyenlet $(\frac{5}{2})^x$-ben másodfokú, megoldásai: $\frac{125}{8}$ és 1.

Az első esetben az $x = 3$, a másodikban az $x = 0$ adódik.

Mindkét esetben valóban számtani sorozatot kapunk (250 000; 133 000; 16 000, illetve 16; 133; 250).

b) A számtani sorozat összegképlete szerint:

$$S_n = \frac{\left[2a_1 + (n-1) \cdot d\right] \cdot n}{2} = \frac{\left[32 + 117(n-1)\right] \cdot n}{2} = 371\,000.$$

Kettővel beszorozva és a műveleteket elvégezve, majd nullára rendezve:

$$117n^2 - 85n - 742\,000 = 0.$$

Ennek a pozitív megoldása az $n_1 = 80$ (a másik gyök negatív: $n_2 = -\frac{9275}{117} \approx -79{,}27$).

Tehát a sorozat első 80 tagjának az összege 371 000.

7. *Egy ötoldalú szabályos gúla minden éle egyenlő.*

a) Mekkora szöget zárnak be a szomszédos oldallapok?

b) Mekkora szöget zár be egy oldalél az alaplappal?

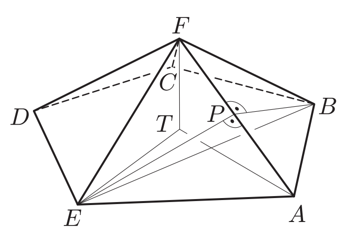
c) Egy ólomból készített papírnehezék alakja éppen ilyen szabályos ötoldalú gúla, melynek minden éle 1,5 cm *hosszúságú. Hány darab papírnehezék önthető* 1,5 kg *ólomból, ha a művelet során a tapasztalatok szerint* 9% *veszteséggel kell számolnunk? (Az ólom sűrűsége* 11,3 g/cm^3.)

(*16 pont*)

Megoldás. *a)* Legyen a gúla alaplapja az $ABCDE$ szabályos ötszög, csúcsa az F pont, oldalélének hossza a. Két oldallap szögét a metszésvonalukra (tehát a közös élre) a két lap síkjában állított merőlegesek szöge határozza meg.

Az AF élre annak P felezőpontjában az AFE, illetve az ABF lapok síkjában állított merőlegesek éppen az AFE és ABF háromszögek magasságai, hiszen az oldallapok szabályos háromszögek, ezért $PE = PB = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

EAB szög a szabályos ötszög egy belső szöge, tehát 108^o-os. Az EAB háromszögben írjuk fel a koszinusztételt a BE oldalra:



$$BE^2 = a^2 + a^2 - 2\cdot a\cdot a\cdot \cos 108^\circ \approx 2{,}618\, a^2, \quad \text{ebből} \quad BE \approx 1{,}618\, a.$$

(Ismert, hogy a szabályos ötszög átlója és oldala az aranymetszés arányában áll egymással, vagyis a $BE = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a$ pontos értékkel is számolhatunk.)

EBP háromszögben felírva a koszinusztételt a keresett BPE szögre:

$$\cos BPE\sphericalangle = \frac{2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}a\right)^2}{2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \approx -0{,}7454,$$

ahonnan $BPE\sphericalangle \approx 138{,}19^\circ$.

Tehát a két szomszédos oldallap által bezárt szög kb. $138{,}19^\circ$.

b) A gúla csúcsának az alaplapon vett merőleges vetülete legyen T. A keresett szög ekkor pl. a TAF szög.

Az AT szakasz hosszát kiszámolhatjuk az EAT egyenlőszárú háromszögből, melynek alapon fekvő szögei 54 fokosak:

$$\frac{\frac{a}{2}}{AT} = \cos 54^\circ, \quad \text{ahonnan} \quad AT = \frac{a}{2\cos 54^\circ} \approx 0{,}8507\, a,$$
$$\cos TAF\sphericalangle = \frac{AT}{AF} = \frac{0{,}8507a}{a} = 0{,}8507,$$

ahonnan $FAT\sphericalangle \approx 31{,}71^\circ$. Egy oldalélnek az alaplappal bezárt szöge tehát kb. $31{,}71^\circ$.

c) A gúla alaplapja egy szabályos ötszög, mely a középpontjából a csúcsokba húzott szakaszokkal öt darab egybevágó egyenlőszárú háromszögre bontható. Ezek szára $(0{,}8507\, a)$ és szárak által bezárt szöge ismert (72°), területük a trigonometrikus területképlettel meghatározható.

A gúla magassága az AFT háromszögből Pitagorasz-tétellel meghatározható:

$$m = TF = \sqrt{AF^2 - AT^2} \approx \sqrt{a^2 - (0{,}8507a)^2} \approx 0{,}5257\, a.$$

Ha $a = 1{,}5$ cm, akkor egy ilyen gúla térfogata:

$$V = \frac{T\cdot m}{3} = \frac{5\cdot\frac{AT^2\cdot\sin 72^\circ}{2}\cdot TF}{3} \approx \frac{5\cdot \sin 72^\circ \cdot 0{,}8507^2\cdot 0{,}5257\cdot a^3}{6} \approx 1{,}02\ \text{cm}^3.$$

1,5 kg = 1500 g ólom térfogata: $V = \dfrac{1500}{11{,}3} \approx 132{,}74\ \text{cm}^3$. Kilenc százalék veszteséggel számolva a hasznos térfogat $132{,}74\cdot 0{,}91 = 120{,}8\ \text{cm}^3$. Az ekkora térfogatú ólomból elkészíthető nehezékek száma legfeljebb $\dfrac{120{,}8}{1{,}02} \approx 118{,}4$, azaz 118 darab papírnehezék készíthető 1,5 kg ólomból.

8. *Bergengócia legnagyobb tavának négy üdülővárosát hajójáratokkal szeretnék összekötni. Minden járat közvetlenül két települést köt össze úgy, hogy közben harmadik várost nem érint (a járatok oda-vissza közlekednek). A hálózatban működő járatok száma 0-tól 6-ig bármennyi lehet.*

a) Hány különböző járathálózat alakítható ki? (Két hálózat akkor különböző, ha van legalább egy olyan járat, mely az egyik hálózatban közlekedik, a másikban nem.)

b) Az összes lehetséges járathálózat hányadrésze lesz összefüggő? (Egy hálózat akkor összefüggő, ha – szükség esetén átszállással – bármely városból bármely másik városba el lehet jutni.)

c) Takarékossági okokból végül úgy döntenek, hogy a lehető legkevesebb járatot indítják el ahhoz, hogy a hálózat még összefüggő legyen. Hány különböző járathálózat alakítható így ki? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A négy település közt $\binom{4}{2} = 6$ különböző járat indítható. Ezek mindegyike egymástól függetlenül vagy része a hálózatnak, vagy nem része, tehát $2^6 = 64$ különböző járathálózat alakítható ki.

Megjegyzés. Ugyanezt az értéket kapjuk, ha a járatok száma szerint összegezzük a lehetséges hálózatokat:

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \ldots + \binom{6}{6} = 64.$$

b) Tekintsük a hálózatot egy gráfnak, ahol a települések a pontok, a járatok pedig az élek. A lehetséges 4 pontú, összefüggő, egyszerű gráfokat keressük.

A 4 pontú gráfok közül minden legalább 4 élű biztosan összefüggő, ezek száma

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 22,$$

a legfeljebb 2 élűek pedig semmiképpen nem összefüggőek. $\binom{6}{3} = 20$ db 3 élű gráf van, melyek közül azok nem összefüggőek, amelyek 3 várost kötnek össze. Ezek száma 4, azaz 16 db 3 élű összefüggő gráf van.

Az előbbi típusból 4 különböző van aszerint, hogy melyik pontból indul a 3 él.

A második típusnál a legelső pontot 4, a másodikat 3, a harmadikat 2-féleképpen választhatjuk ki, de ugyanezt a gráfot kapjuk, ha a sort a másik végéről kezdjük el felsorolni. Így ezek száma $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12$.

A feltételeknek megfelelő összes lehetséges különböző járathálózat száma tehát $22 + 16 = 38$, azaz a hálózatok $\frac{38}{64} = \frac{19}{32}$-ed része összefüggő.

c) A pontosan 3 élű hálózatok felelnek meg a feltételeknek, ezek száma (az előbbiek szerint): $4 + 12 = 16$.

9. *Murmur úr telkét a szomszéd telkétől egy* 180 cm *magas kerítés választja el. Milyen szögben kell a kerítéshez támasztania a* 390 cm *magas paravánját, ha azt szeretné, hogy az a szomszéd kertjére a lehető legnagyobb árnyékot vesse, feltéve, hogy a Nap éppen függőlegesen süt? Hány méterre nyúlik be a szomszéd telkére ez az árnyék?* (*16 pont*)

Megoldás. Válasszuk ismeretlennek a paraván és a kert vízszintes síkja által bezárt α szöget. A paraván által vetett teljes árnyék legyen d_1, ebből Murmur úr kertjébe esik d_2, ahol $\cos\alpha = \frac{d_1}{390}$ és $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{d_2}{180}$.

A szomszéd kertjére eső árnyékot megadó függvény tehát:

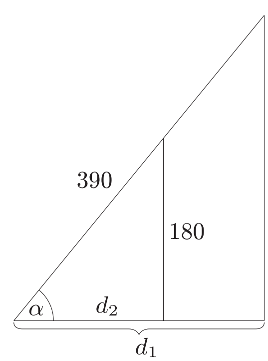
$$f(\alpha) = d_1 - d_2 = 390\cos\alpha - 180\operatorname{ctg}\alpha \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ).$$

Ennek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja nulla:

$$f'(\alpha) = -390\sin\alpha + \frac{180}{\sin^2\alpha} = 0,$$

azaz

$$\sin\alpha = \sqrt[3]{\frac{180}{390}} \approx 0{,}7728,$$



ahonnan $\alpha \approx 50{,}6^\circ$. Ekkor a szomszéd telkére $f(50{,}6^\circ) \approx 99{,}7$ cm-re, tehát kb. 1 méter mélyre nyúlik be az árnyék.

Az f második deriváltja

$$f''(\alpha) = -390\cos\alpha - \frac{360\cos\alpha}{\sin^3\alpha},$$

s mivel $f''(50{,}6^\circ) < 0$, azért a talált érték valóban maximumhely, tehát $50{,}6^\circ$-os szögben kell Murmur úrnak a kerítéshez támasztani a paravánját.