

I. rész

1. Számítsuk ki számológép használata nélkül a következő kifejezések pontos értékét:

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}, \\b &= (0,2^{-1} \cdot 3125^{0,4} - \sqrt[3]{64^2} - 1) : 27, \\c &= -4 \cdot \sin \frac{67\pi}{6} \cdot \lg 0,01.\end{aligned}$$

(11 pont)

Megoldás. A nagy négyzetgyökök alatt végezzük el a kivonást:

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}(3+2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}(3-2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}} = \\&= \sqrt{\frac{6\sqrt{2} + 8 - 6\sqrt{2} + 8}{9-8}} = \sqrt{16} = 4.\end{aligned}$$

Alkalmazzuk a negatív és a törtkitevőkre tanult definíciókat:

$$\begin{aligned}b &= (0,2^{-1} \cdot 3125^{0,4} - \sqrt[3]{64^2} - 1) : 27 = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \cdot (5^5)^{\frac{2}{5}} - 64^{\frac{2}{3}} - 1}{27} = \\&= \frac{5 \cdot 5^2 - (2^6)^{\frac{2}{3}} - 1}{27} = \frac{125 - 16 - 1}{27} = 4.\end{aligned}$$

Tudjuk, hogy

$$\sin \frac{67\pi}{6} = \sin \left(\frac{7\pi}{6} + 5 \cdot 2\pi \right) = \sin \frac{7\pi}{6} = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Ezt és a logaritmus definícióját felhasználva:

$$c = -4 \cdot \sin \frac{67\pi}{6} \cdot \lg 0,01 = -4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \lg 10^{-2} = -4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot (-2) = -4.$$

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\frac{\cos^2 x + 4}{\sin^2 x - 4} = \frac{-3 \cos^2 x + 3 \sin x - 4}{\cos^2 x + 3}. \quad (12 \text{ pont})$$

Megoldás. Tudjuk, hogy $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ezért a jobb oldalon álló tört nevezője:

$$\cos^2 x + 3 = 4 - \sin^2 x.$$

Vagyis az egyenletet a következő alakban is írhatjuk:

$$\frac{\cos^2 x + 4}{\sin^2 x - 4} = \frac{3 \cos^2 x - 3 \sin x + 4}{\sin^2 x - 4}.$$

Mivel $-1 \leq \sin x \leq 1$, azért a törtek minden valós x esetén értelmezettek lesznek, hiszen a nevezőjük nem lesz nulla.

A két oldal nevezője egyenlő, ezért akkor lesz a két tört egyenlő, ha a számlálók is egyenlők:

$$\begin{aligned}\cos^2 x + 4 &= 3 \cos^2 x - 3 \sin x + 4, \\0 &= 2 \cos^2 x - 3 \sin x.\end{aligned}$$

Ismét alkalmazhatjuk, hogy $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ekkor a következő, $\sin x$ -re másodfokú egyenletet kapjuk:

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0.$$

Alkalmazzuk a megoldóképletet:

$$(\sin x)_{1;2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}.$$

Két lehetőséget kapunk:

I. $\sin x = -2$. Ez nem ad megoldást.

II. $\sin x = \frac{1}{2}$. Ekkor

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi, \quad \text{ahol } k_1 \in \mathbb{Z},$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi, \quad \text{ahol } k_2 \in \mathbb{Z}.$$

3. Egy háromjegyű szám négyszerezéséhez 36-ot kell adnunk, hogy a számjegyeiből a fordított sorrendben alkotott háromjegyű számot kapjuk. Melyik volt az eredeti háromjegyű szám? (14 pont)

Megoldás. Az eredeti háromjegyű számot jelöljük $\overline{abc}$ -vel, ahol a, b, c a szám számjegyeit jelöli. Mivel $\overline{abc}$ és $\overline{cba}$ is háromjegyű szám, azért $a \neq 0, c \neq 0$. A feladat szövege alapján a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$4 \cdot \overline{abc} + 36 = \overline{cba}.$$

Vegyük figyelembe a helyiértékeket:

$$4 \cdot (100a + 10b + c) + 36 = 100c + 10b + a,$$

$$400a + 40b + 4c + 36 = 100c + 10b + a,$$

$$399a + 30b + 36 = 96c.$$

Mivel a jobb oldal legnagyobb értéke $96 \cdot 9$, azaz 864 lehet, azért az a értéke vagy 1, vagy 2 lehet.

I. eset: $a = 1$. Ekkor az egyenlet:

$$399 \cdot 1 + 30b + 36 = 96c,$$

$$30b + 435 = 96c.$$

A bal oldal osztható 5-tel, ezért a jobb oldalon az eddigi feltételeink alapján csak a $c = 5$ jöhetne szóba. Fejezzük ki a b -t:

$$b = \frac{96 \cdot 5 - 435}{30} = 1,5.$$

Ebben az esetben nem kaptunk megfelelő háromjegyű számot.

II. eset: $a = 2$. Ekkor az egyenlet:

$$399 \cdot 2 + 30b + 36 = 96c,$$

$$30b + 834 = 96c.$$

Mivel a bal oldal 834-nél nem kisebb, csak a $c = 9$ jöhet szóba. Ekkor a b -t is megkapjuk:

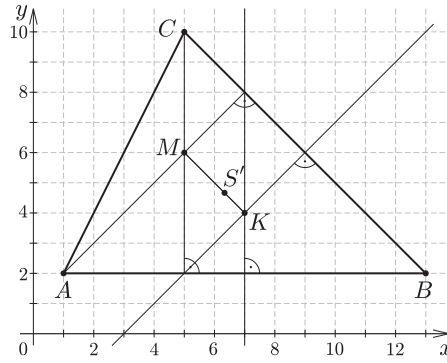
$$b = \frac{96 \cdot 9 - 834}{30} = 1.$$

Vagyis a feladat egyedüli megoldása a 219.

(Valóban: $4 \cdot 219 + 36 = 912$.)

4. Csúcsainak koordinátaival adott egy háromszög: $A(1; 2)$, $B(13; 2)$, $C(5; 10)$. Számítással igazoljuk ebben a háromszögben, hogy az MK szakasz K ponthoz közelebbi harmadoló pontja az ABC háromszög S súlypontja lesz. (M a magasságpontot, K a háromszög köré írt kör középpontját jelöli.) (14 pont)

Megoldás. Készítsünk ábrát. Mivel AB oldal párhuzamos az x tengellyel, azért az M magasságpont rajta van a C csúcsra illeszkedő y tengellyel párhuzamos egyenesen. Ez azt jelenti, hogy az M pont első koordinátája egyenlő a C csúcs első koordinátájával, ami 5. Írjuk fel az A csúcsra illeszkedő magasság egyenletét. Ez a magasság merőleges a BC egyenesre, ezért a C -ből B -be mutató vektor az egyik normálvektora lesz. A megadott koordinátákkal ez a $(8; -8)$ vektor, aminek vehetjük a nyolcadát, hiszen az is merőleges lesz a kérdéses magasságra. Az $A(1; 2)$ pontra illeszkedő, $\mathbf{n}(1; -1)$ normálvektorú egyenes egyenlete: $x - y = -1$. Mivel az M pont erre az egyenesre is illeszkedik, és az első koordinátáját már ismerjük, azért a második koordinátát is megkapjuk behelyettesítéssel: $M(5; 6)$.



Mivel AB oldal párhuzamos az x tengellyel, azért a K középpont rajta van az AB szakasz y tengellyel párhuzamos felező merőlegesén. Vagyis a K pont első koordinátája egyenlő az A és B csúcs első koordinátáinak számtani közepével, ami 7. Írjuk fel a BC oldal felező merőlegesének egyenletét. Ez az egyenes párhuzamos az A -ra illeszkedő magassággal, ezért normálvektoraik megegyeznek. Meghatározzuk a BC oldal felezőpontjának koordinátáit a megadott csúcsokkal: $(9; 6)$. Vagyis a felező merőleges egyenes egyenlete: $x - y = 3$. Mivel a K pont erre az egyenesre is illeszkedik, és az első koordinátáját már ismerjük, azért a második koordinátát is megkapjuk: $K(7; 4)$.

Az M és a K ismeretében írjuk fel az MK szakasz K -hoz közelebbi S' harmadolópontjának koordinátáit:

$$S' \left(\frac{2 \cdot 7 + 5}{3}; \frac{2 \cdot 4 + 6}{3} \right).$$

Vagyis a keresett harmadolópont:

$$S' \left(\frac{19}{3}; \frac{14}{3} \right).$$

Végezetül számoljuk ki az ABC háromszög S súlypontjának koordinátáit:

$$S \left(\frac{1 + 13 + 5}{3}; \frac{2 + 2 + 10}{3} \right).$$

A háromszög súlypontja:

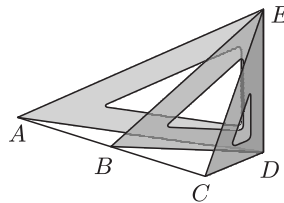
$$S \left(\frac{19}{3}; \frac{14}{3} \right).$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

Megjegyzés. Általában is igazolható, hogy az M , K , S pontok egy egyenesre, az Euler-egyenesre illeszkednek, és az S az MK szakaszon a K -hoz közelebbi harmadoló pont. Most azonban nem hivatkozhattunk erre, mert a feladat kérése az volt, hogy számítással ebben a megadott háromszögben igazoljuk az állítást.

II. rész

5. Az ábrán látható építményt három derékszögű vonalzóból úgy raktuk össze, hogy az azonos hosszúságú befogójuknál illeszkedjenek egymáshoz, a további befogók pedig az asztallapon legyenek.



A középső vonalzó egyenlő szárú, az egyik szélsőnek a hosszá, a másiknak a rövid befogója érintkezik az asztallappal. Az ábrán látható A , B és C pontok egy egyenesre illeszkednek, és $AB = BC = 8$ cm.

a) Adjuk meg az ADE , BDE és CDE derékszögű háromszögek területének arányát.

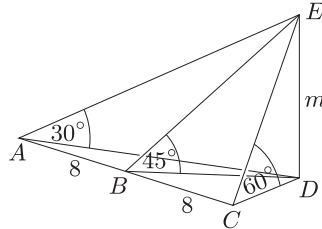
b) Milyen magasan van az asztal fölött az E pont?

(16 pont)

Megoldás. a) Készítsünk *vázlatrajzot*. Az ADE derékszögű háromszögben: $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{m}{AD}$. Vagyis az AD hossza kifejezhető az m segítségével:

$$AD = \frac{m}{\operatorname{tg} 30^\circ} = m\sqrt{3}.$$

Hasonlóan adódik a BDE és a CDE derékszögű háromszögekben a BD és a CD szakaszok hossza: $BD = m$, $CD = \frac{m}{\sqrt{3}}$.



Ezek segítségével a területeket is fel tudjuk írni. Mivel a területek arányát kell megadnunk, azért most kényelmesebb a területek kétszeresével számolnunk:

Az ADE területének kétszerese: $2T_1 = m^2 \cdot \sqrt{3}.$

A BDE területének kétszerese: $2T_2 = m^2.$

A CDE területének kétszerese: $2T_3 = \frac{m^2}{\sqrt{3}}.$

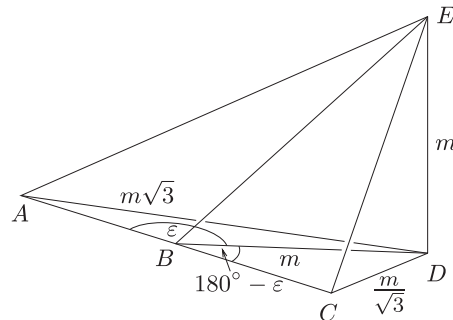
Ezek alapján a területek aránya:

$$T_1 : T_2 : T_3 = \sqrt{3} : 1 : \frac{1}{\sqrt{3}} = 3 : \sqrt{3} : 1.$$

b) Az ábrán látható jelöléseket használva (és felhasználva, hogy az AD , BD és CD szakaszok hosszát ki tudjuk fejezni az m segítségével) alkalmazzuk az ABD és a CBD háromszögre a koszinusz-tételt az ABD háromszögre:

$$(m\sqrt{3})^2 = 8^2 + m^2 - 2 \cdot 8 \cdot m \cdot \cos \varepsilon,$$

$$3m^2 = 64 + m^2 - 16m \cdot \cos \varepsilon.$$



A CBD háromszögre:

$$\left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)^2 = 8^2 + m^2 - 2 \cdot 8 \cdot m \cdot \cos(180^\circ - \varepsilon),$$

$$\frac{m^2}{3} = 64 + m^2 - 16m \cdot \cos(180^\circ - \varepsilon),$$

$$\frac{m^2}{3} = 64 + m^2 + 16m \cdot \cos \varepsilon.$$

Adjuk össze a koszinusz-tétellel felírt két egyenletet:

$$\frac{10m^2}{3} = 128 + 2m^2, \quad m^2 = 96.$$

Így megkaptuk a keresett magasságot: $m = \sqrt{96} \approx 9,8$.

Vagyis az E pont az asztallapja fölött kb. 9,8 cm magasan van.

6. Tekintsük az $f(x) = x^2$ hozzárendelésű függvény grafikonjára illeszkedő, az

$$A_n(-n; f(-n)), \quad B_n(n; f(n)), \quad C_n(n+1; f(n+1)), \quad D_n(-n-1; f(-n-1))$$

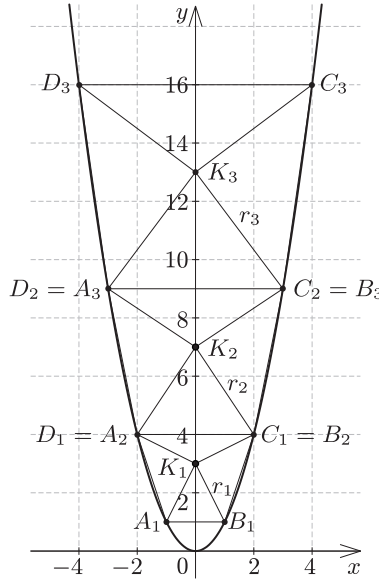
pontok által meghatározott húrtrapézokat (n pozitív egész számot jelöl). Az $A_nB_nC_nD_n$ körülírt körének sugara legyen r_n .

a) Adjuk meg az $r_1 + r_2 + r_3$ összeget.

b) Határozzuk meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2}{n^3}$ határértéket.

(16 pont)

Megoldás. a) A feladat szövegét értelmezve készítsünk egy ábrát.



Az $A_1B_1C_1D_1$ húrnégyszög körülírt körének középpontja: $K_1(0; k_1)$. Tudjuk, hogy $r_1 = K_1B_1 = K_1C_1$. A koordinátákkal kifejezve:

$$\begin{aligned} \sqrt{(1-0)^2 + (1-k_1)^2} &= \sqrt{(2-0)^2 + (4-k_1)^2}, \\ 1 + 1 - 2k_1 + k_1^2 &= 4 + 16 - 8k_1 + k_1^2, \\ k_1 &= 3. \end{aligned}$$

Vagyis $K_1(0; 3)$, és $r_1 = K_1B_1 = \sqrt{5}$.

Az $A_2B_2C_2D_2$ húrnégyszög körülírt körének középpontja: $K_2(0; k_2)$. Tudjuk, hogy $r_2 = K_2B_2 = K_2C_2$. A koordinátákkal kifejezve:

$$\begin{aligned} \sqrt{(2-0)^2 + (4-k_2)^2} &= \sqrt{(3-0)^2 + (9-k_2)^2}, \\ 4 + 16 - 8k_2 + k_2^2 &= 9 + 81 - 18k_2 + k_2^2, \\ k_2 &= 7. \end{aligned}$$

Vagyis $K_2(0; 7)$, és $r_2 = K_2B_2 = \sqrt{13}$.

Az $A_3B_3C_3D_3$ húrnégyszög körülírt körének középpontja: $K_3(0; k_3)$. Tudjuk, hogy $r_3 = K_3B_3 = K_3C_3$. A koordinátákkal kifejezve:

$$\begin{aligned} \sqrt{(3-0)^2 + (9-k_3)^2} &= \sqrt{(4-0)^2 + (16-k_3)^2}, \\ 9 + 81 - 18k_3 + k_3^2 &= 16 + 256 - 32k_3 + k_3^2, \\ k_3 &= 13. \end{aligned}$$

Vagyis $K_3(0; 13)$, és $r_3 = K_3B_3 = 5$.

Ezek alapján: $r_1 + r_2 + r_3 = \sqrt{5} + \sqrt{13} + 5 \approx 10,84$.

b) Az előző részben látottak alapján járunk el most is. Az $A_n B_n C_n D_n$ húrnégyszög körülírt körének középpontja: $K_n(0; k_n)$. Tudjuk, hogy $r_n = K_n B_n = K_n C_n$. A koordinátákkal kifejezve:

$$\begin{aligned}\sqrt{(n-0)^2 + (n^2 - k_n)^2} &= \sqrt{(n+1-0)^2 + (n^2 + 2n + 1 - k_n)^2}, \\ n^2 + n^4 - 2n^2 k_n + k_n^2 &= n^2 + 2n + 1 + (n^2 + 2n + 1)^2 - 2k_n(n^2 + 2n + 1) + k_n^2, \\ (4n+2)k_n &= 4n^3 + 6n^2 + 6n + 2, \\ k_n &= \frac{2n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{2n+1} = \frac{(2n+1)(n^2 + n + 1)}{2n+1} = n^2 + n + 1.\end{aligned}$$

Vagyis $K_n(0; n^2 + n + 1)$, és $r_n^2 = (n-0)^2 + (n^2 - n^2 - n - 1)^2 = n^2 + (n+1)^2$.

Most már felírhatjuk a tört számlálójában szereplő összeget:

$$r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 = (1^2 + 2^2) + (2^2 + 3^2) + \dots + (n^2 + (n+1)^2).$$

A zárójeles kifejezések első tagjai 1-től n -ig a négyzetszámok összegét adják, a második tagjai pedig 1-től $(n+1)$ -ig a négyzetszámok összegénél 1-gyel kisebb összeget adnak:

$$\begin{aligned}r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - 1 = \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 2n^2 + 7n + 6) - 6}{6} = \\ &= \frac{4n^3 + 8n^2 + 6n + 4n^2 + 8n + 6 - 6}{6} = \frac{2n^3 + 6n^2 + 7n}{3}.\end{aligned}$$

Ezt a képletet és a határértékre vonatkozó tételeket felhasználva:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 6n^2 + 7n}{3n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{6}{n} + \frac{7}{n^2}}{3} = \frac{2}{3}.$$

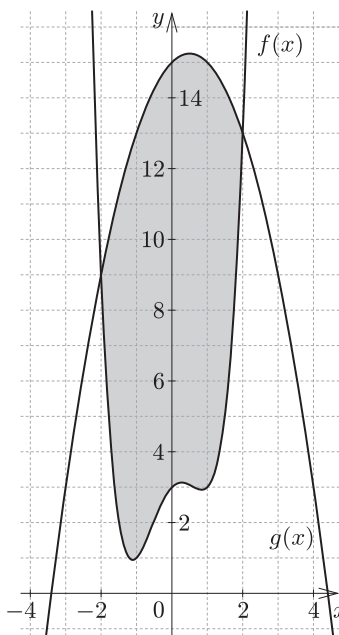
7. Egy terepasztalon az ábrán látható folt egy tó alakját mutatja. Ha ezt a síkidomot 1 cm egységű koordinátarendszerbe helyezzük, akkor a határvonalát az

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 3$$

és a

$$g(x) = -x^2 + x + 15$$

hozzárendeléssel adott függvények grafikonja adja.



a) Milyen messze van egymástól a grafikonok metszéspontja?

b) Mekkora a folt területe?

(16 pont)

Megoldás. a) Szükségünk van a két függvény grafikonjának a metszéspontjaira. Ezért a következő egyenletet kell megoldanunk:

$$\begin{aligned}x^4 - 2x^2 + x + 3 &= -x^2 + x + 15, \\x^4 - x^2 - 12 &= 0, \\(x^2 - 4)(x^2 + 3) &= 0.\end{aligned}$$

Vagyis $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Ezek a helyeken a közös függvényértéket visszahelyettesítéssel kapjuk:

$$f(-2) = g(-2) = 9, \quad f(2) = g(2) = 13.$$

A metszéspontok: $M_1(-2; 9)$, $M_2(2; 13)$. Ezek távolsága:

$$M_1M_2 = \sqrt{(-2-2)^2 + (9-13)^2} = \sqrt{32} \approx 5,7.$$

A két metszéspont kb. 5,7 cm-re van egymástól.

b) A $g(x)$ függvény és az $f(x)$ függvény $[-2; 2]$ intervallumban pozitív, így a görbe alatti területek különbségét véve megkapjuk a kérdéses területet¹. Ezt határozott integrállal tudjuk meghatározni:

$$\begin{aligned}T &= \int_{-2}^2 (-x^2 + x + 15) dx - \int_{-2}^2 (x^4 - 2x^2 + x + 3) dx = \int_{-2}^2 (-x^4 + x^2 + 12) dx = \\&= \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + 12x \right]_{-2}^2 = -\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3} + 24 + \frac{(-2)^5}{5} - \frac{(-2)^3}{3} + 24 = \\&= -\frac{32}{5} + \frac{8}{3} - \frac{32}{5} + \frac{8}{3} + 48 = -\frac{64}{5} + \frac{16}{3} + 48 = 40,53.\end{aligned}$$

Vagyis a folt területe kb. 40,53 cm².

8. Adjuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az

$$\begin{cases}xy + x + y + 2 = 0, \\x - p = y(px + 1)\end{cases}$$

egyenletrendszernek pontosan egy valós $(x; y)$ számpár legyen a megoldása.

(16 pont)

Megoldás. Mindkét egyenletből kifejezzük az xy -t:

$$xy = -x - y - 2, \quad \text{illetve} \quad pxy = x - y - p.$$

Ha $p = 0$, akkor a fenti egyenletből az $x = y$ adódna, de ezt behelyettesítve a másik egyenletbe nem kapunk megoldást.

Ha $p \neq 0$, akkor $xy = \frac{x - y - p}{p}$. A kapottak alapján:

$$\begin{aligned}\frac{x - y - p}{p} &= -x - y - 2, \\x - y - p &= -px - py - 2p, \\(p - 1)y &= -x - px - p.\end{aligned}$$

Ha $p = 1$, akkor pontosan egy számpár a megoldása az egyenletrendszernek:

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = -3.$$

Ha $p \neq 1$, akkor $y = \frac{-x - px - p}{p - 1}$. Ezt visszahelyettesítjük az eredeti egyenletrendszer első egyenletébe:

$$\frac{x(-x - px - p)}{p - 1} + x + \frac{-x - px - p}{p - 1} + 2 = 0.$$

¹ Az f és g függvények grafikonja közötti terület a $[-2; 2]$ intervallumban:

$$\int_{-2}^2 (g(x) - f(x)) dx.$$

Szorozzuk $(p-1)$ -gyel, végezzük el a beszorzásokat, összevonásokat és rendezzük a következő alakra:

$$(p+1)x^2 + (p+2)x + (2-p) = 0.$$

Ha $p = -1$, akkor pontosan egy számpár a megoldása az egyenletrendszernek:

$$x = -3, \quad y = -\frac{1}{2}.$$

Ha $p \neq -1$, akkor az egyenlet másodfokú. Egyféle x -et akkor kapunk, ha a diszkrimináns nulla:

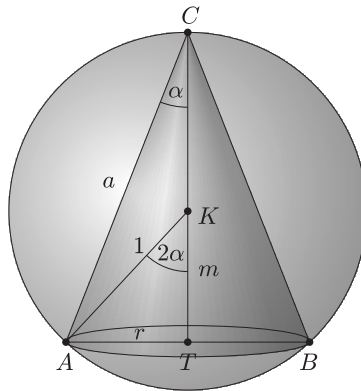
$$D = (p+2)^2 - 4(p+1)(2-p) = 5p^2 - 4 = 0.$$

Ez $p_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, vagy $p_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ esetén következik be.

Tehát a p lehetséges értékei: $-1, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 1$.

9. Az egységsugarú gömbbe olyan kúpot írunk, amelyben a tengely és az alkotó szöge α . Adjuk meg a kúp felszínét és térfogatát $\sin \alpha$ függvényében. (16 pont)

Megoldás. Készítsünk vázlatrajzot a térbeli ábra tengelyre illeszkedő síkmetszetéről.



A kerületi és a középponti szögek közötti összefüggést használva, ha $\angle ACT = \alpha$, akkor $\angle AKT = 2\alpha$. Az $\triangle ATK$ derékszögű háromszögben:

$$r = \frac{r}{1} = \sin 2\alpha.$$

Az $\triangle ATC$ derékszögű háromszögben $\sin \alpha = \frac{r}{a}$, vagyis

$$a = \frac{r}{\sin \alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos \alpha.$$

Az $\triangle ATC$ derékszögű háromszögben $\tan \alpha = \frac{r}{m}$, vagyis

$$m = \frac{r}{\tan \alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos^2 \alpha.$$

Most már felírhatjuk a felszínét és a térfogatot α segítségével. A feladat kérdésének megfelelően a kapott kifejezéseket úgy alakítjuk, hogy csak szinusz szögfüggvény maradjon bennük:

$$\begin{aligned} A &= \pi r(r + a) = \pi \sin 2\alpha(\sin 2\alpha + 2 \cos \alpha) = 2\pi \sin \alpha \cos \alpha(2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos \alpha) = \\ &= 4\pi \sin \alpha \cos^2 \alpha(\sin \alpha + 1) = 4\pi \sin \alpha(1 - \sin^2 \alpha)(\sin \alpha + 1). \end{aligned}$$

$$V = \frac{r^2 \pi m}{3} = \frac{2\pi \sin^2 2\alpha \cos^2 \alpha}{3} = \frac{8\pi \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha}{3} = \frac{8\pi \sin^2 \alpha(1 - \sin^2 \alpha)^2}{3}.$$