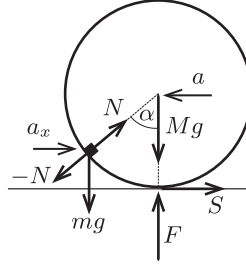


Elméleti feladatok

1. feladat

A rész. Az 1. ábra mutatja a kis testre és a csőre ható erőket: az m tömegű kis testre az mg nehézségi erő és az N nyomóerő, az M tömegű csőre az Mg nehézségi erő, a talaj F nyomóereje, az S tapadási súrlódási erő és a kis test által kifejtett $-N$ nyomóerő hat.



1. ábra. A kis testre és a csőre ható erők

Írjuk fel a mozgásegyenletet a kis test a_x vízszintes (az ábrán jobbra mutató) gyorsuláskomponensére, a cső tömegközéppontjának a (az ábrán balra mutató) gyorsulására és a cső β szöggyorsulására:

$$\begin{aligned} ma_x &= N \sin \alpha, \\ Ma &= N \sin \alpha - S, \\ \Theta \beta &= SR, \end{aligned}$$

ahol $\Theta = MR^2$ a cső tehetetlenségi nyomatéka. A cső gyorsulása és szöggyorsulása között a tiszta gördülés miatt fennáll az $a = \beta R$ kapcsolat.

Az egyenletrendszer megoldva a testek gyorsulásai között az $ma_x = 2Ma$ összefüggés adódik. A testek kezdetben nyugalomban voltak, és ez az összefüggés a mozgás során mindvégig fennáll, így a kis test u vízszintes sebességgkomponense és a cső v sebessége között is ugyanilyen kapcsolat áll fenn: $mu = 2Mv$.

A rendszer konzervatív, így teljesül az energiamegmaradás tétele. Az egyenletet a kezdeti állapotra és arra a pillanatra írjuk fel, amikor a kis test éppen legalul van (és csak vízszintes irányban mozog):

$$mgR = \frac{mu^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} + \frac{\Theta \omega^2}{2},$$

ahol ω a cső szögsebessége, és a tiszta gördülés miatt $v = \omega R$.

Az egyenletekből kifejezhetjük a kis test és a cső sebességét abban a pillanatban, amikor a kis test épp legalul van:

$$u = 2\sqrt{\frac{MgR}{2M+m}}, \quad v = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{MgR}{2M+m}}.$$

Vizsgáljuk a kis test mozgását a cső tömegközéppontjával együttmozgó vonatkoztatási rendszerben: itt a kis test R sugarú pályán körmozgást végez. A pálya legalján a sebessége $v_{\text{rel}} = u + v$, centripetális gyorsulása pedig

$$a_{\text{cp}} = \frac{v_{\text{rel}}^2}{R} = \frac{(u+v)^2}{R}.$$

Ebben a pillanatban a cső gyorsulása nulla, így a kis test gyorsulása a talajhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben is ugyanekkora. Így a kis testre vonatkozó mozgásegyenlet: $ma_{\text{cp}} = F - mg$, amiből a keresett F erő:

$$F = 3mg \left(1 + \frac{m}{3M}\right).$$

B rész. 1) A termodinamika első főtétele alapján a gáz által felvett δQ hő

$$\delta Q = nC_V dT + p dV,$$

¹ Az elméleti feladatok szövegét a múlt havi számunkban közzeltük.

a keresett C moláris hőkapacitás pedig

$$C = \frac{1}{n} \frac{\delta Q}{dT} = C_V + \frac{p}{n} \frac{dV}{dT}.$$

Az egyenletekben C_V az állandó nyomáson mért moláris hőkapacitás, p , n , V és T pedig a buborékban lévő gáz nyomása, mólszáma, térfogata és hőmérséklete.

A Laplace-képlet alapján

$$p = \frac{4\sigma}{r},$$

és eszerint a buborékban lévő gáz állapotváltozása egy olyan politropikus folyamat, melyre $p^3V = \text{állandó}$. Ezt összevetve az ideális gáz $pV = nRT$ állapotegyenletével kapjuk, hogy

$$T^3V^{-2} = \text{állandó},$$

amit differenciálva

$$\frac{dV}{dT} = \frac{3V}{2T}.$$

Behelyettesítve ezt az eredményt a moláris hőkapacitás képletébe:

$$C = C_V + \frac{p}{n} \frac{3V}{2T} = C_V + \frac{3}{2}R,$$

majd felhasználva, hogy a kétatomos gáz állandó térfogaton mért moláris hőkapacitása

$$C_V = \frac{5}{2}R,$$

a keresett moláris hőkapacitás

$$C = \frac{5}{2}R + \frac{3}{2}R = 4R = 33,2 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}.$$

2) Mivel a gáz hőkapacitása sokkal kisebb, mint a buborék hőkapacitása, valamint a gáz és a buborék között jó hőkontaktus van, a gáz állapotváltozása izotermikusnak tekinthető.

Egyensúlyi állapotban a gáz p nyomása megegyezik az r sugarú buborék p_g görbületi nyomásával:

$$p = p_g = \frac{4\sigma}{r}.$$

Tekintsük a szappanhártya kicsiny A felületű darabját. Ennek tömege

$$m = \rho Ah.$$

Ha a buborék sugarának kicsiny megváltozását x -szel jelöljük, akkor a felületdarabkára felírt mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x} \approx (p' - p'_g)A,$$

ahol p' a gáz nyomása, p'_g a görbületi nyomás az $r + x$ sugarú buborékban.

Az izotermikus állapotváltozás miatt $p'V' = pV$, amiből

$$p' = p \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{r}\right)^3} \approx p \left(1 - \frac{3x}{r}\right) = p_g \left(1 - \frac{3x}{r}\right).$$

A görbületi nyomás

$$p'_g = \frac{4\sigma}{r+x} \approx p_g \left(1 - \frac{x}{r}\right).$$

Behelyettesítve a mozgásegyenletbe:

$$\rho Ah \ddot{x} = p_g \left(-\frac{2x}{r}\right) A, \quad \ddot{x} = -\frac{8\sigma}{\rho h r^2} x,$$

amiből a rezgés körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho h r^2}} = 108 \text{ s}^{-1}.$$

C rész. I. megoldás: Abban a pillanatban, amikor a tekercseken át folyó áram maximális, a tekercseken nem esik feszültség. Emiatt a két kondenzátoron azonos nagyságú, ellentétes feszültségnek kell esnie. Jelöljük ebben a pillanatban a kondenzátorok feszültségét U -val, a maximális áramerősséget pedig I_0 -lal.

A töltésmegmaradás miatt $q_0 = 2CU + CU$, amiből a kondenzátorok feszültsége

$$U = \frac{q_0}{3C}.$$

Az energiamegmaradás alapján

$$\frac{q_0^2}{4C} = \frac{LI_0^2}{2} + \frac{2LI_0^2}{2} + \frac{CU^2}{2} + \frac{2CU^2}{2},$$

amiből pedig a maximális áram

$$I_0 = \frac{q_0}{3\sqrt{2LC}}.$$

Miután a K kapcsolót bezárjuk két, egymástól független rezgőkör alakul ki. Mindkét rezgőkör körfrekvenciája

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}.$$

Az egyes rezgőkörökben a rezgés amplitúdóját, azaz az áramerősségeket $\hat{I}_1$ és $\hat{I}_2$ maximumát az energiamegmaradás alapján határozhatjuk meg:

$$\frac{2CU^2}{2} + \frac{LI_0^2}{2} = \frac{L\hat{I}_1^2}{2}, \quad \frac{CU^2}{2} + \frac{2LI_0^2}{2} = \frac{2L\hat{I}_2^2}{2},$$

amiből $\hat{I}_1 = \sqrt{5}I_0$, $\hat{I}_2 = \sqrt{2}I_0$.

Ha az áram irányát mindkét áramkörben az óramutató járásával egyezőnek vesszük, a kapcsolón átfolyó áram: $I = I_1 - I_2$, ahol az I_1 és I_2 áramok időfüggése:

$$I_1(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad I_2(t) = D \cos \omega t + F \sin \omega t.$$

Az A és D konstansok meghatározásához írjuk fel a kezdeti feltételeket:

$$I_1(0) = A = I_0, \quad I_2(0) = D = I_0,$$

a B és F konstansok meghatározásához pedig a maximális áramerősségeket:

$$A^2 + B^2 = \hat{I}_1^2, \quad D^2 + F^2 = \hat{I}_2^2,$$

amiből

$$B = 2I_0, \quad F = -I_0.$$

Az F együttható negatív előjele azt fejezi ki, hogy a kapcsoló bekapcsolásának pillanatában a $2L$ induktivitású tekercs árama csökken.

Eszerint az egyes rezgőkörök áramának időfüggése:

$$I_1(t) = I_0(\cos \omega t + 2 \sin \omega t), \quad I_2(t) = I_0(\cos \omega t - \sin \omega t),$$

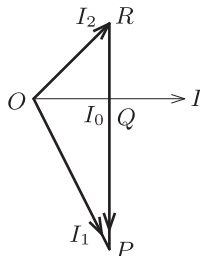
a kapcsolón átfolyó áram időfüggvénye pedig:

$$I(t) = I_1(t) - I_2(t) = 3I_0 \sin \omega t.$$

Ebből a keresett maximális áramerősség:

$$I_{\max} = 3I_0 = \omega q_0 = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$

II. megoldás: Az A , B , D és F állandók meghatározása helyett a maximális áramerősséget a 2. ábrán látható vektordiagramból is meghatározhatjuk. A keresett $I_{\max}$ áramerősség nagyságát a PR szakasz hossza határozza meg.



2. ábra. Vektordiagram a maximális áram meghatározásához

A kapcsoló bekapcsolásakor az I_1 áram növekszik, mert a $2C$ kapacitású kondenzátor továbbra is kívül, míg az I_2 áram csökken, hiszen a C kapacitású kondenzátor tovább töltődik. Emiatt az I_1 és I_2 áramokat az OP , illetve az OR vektorok ábrázolják. A vektorok hossza az *I. megoldás* alapján $\sqrt{5}I_0$, illetve $\sqrt{2}I_0$. A kapcsoló bekapcsolásakor mindkét áram nagysága I_0 , ami az ábrán éppen az OQ szakasz hossza.

A Pitagorasz-tétel alapján ebből:

$$PQ = \sqrt{OP^2 - OQ^2} = 2I_0, \quad QR = \sqrt{OR^2 - OQ^2} = I_0,$$

ebből pedig a keresett maximális áramerősség:

$$I_{\max} = PR = 3I_0 = \omega q_0 = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$

III. megoldás: Mivel a két rezgőkör körfrekvenciája megegyezik, a kapcsolón átfolyó áram körfrekvenciája is ugyanakkora lesz. A kapcsoló zárásakor a rajta átfolyó áram értéke nulla, így a kapcsolón át folyó I áram időfüggvénye:

$$I(t) = I_{\max} \sin \omega t, \quad \text{ahol} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}.$$

Mivel a kapcsoló zárásakor ez az áram nulla

$$I_{\max} = \frac{\dot{I}}{\omega},$$

ahol $\dot{I}$ az áram idő szerinti deriváltjának értéke a bekapcsolás pillanatában.

Legyen egy adott pillanatban a $2C$ kapacitású kondenzátor töltése q_1 . Ekkor a másik kondenzátor töltése a töltésmegmaradás miatt $q_2 = q_0 - q_1$ lesz. A kapcsoló zárása után

$$\dot{I}_1 = \omega^2 q_1, \quad \dot{I}_2 = -\omega^2 (q_0 - q_1).$$

A kapcsolón átfolyó áram idő szerinti deriváltja

$$\dot{I} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = \omega^2 q_0,$$

amiből pedig a keresett maximális áram:

$$I_{\max} = \frac{\dot{I}}{\omega} = \omega q_0 = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$

Ebből a megoldásból az is látszik, hogy a maximális áram értéke független a kapcsoló zárásának időpontjától.

2. feladat. Van der Waals-állapotegyenlet

A rész. Reális gázok állapotegyenlete

A1. A van der Waals-gáz

$$(1) \quad \left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

állapotegyenletében szereplő b paraméter egy mólnyi részecske saját térfogatát jelenti, így ha a részecskéket d átmérőjű gömböknek tekintjük, akkor

$$(2) \quad b = N_A \frac{4\pi}{3} \left(\frac{d}{2}\right)^3 = N_A \frac{\pi}{6} d^3,$$

ahol N_A az Avogadro-szám. Csak *becslésről* van szó, hasonló nagyságrendű értéket kapunk, ha a részecskéket d oldalú kockának vagy d sugarú gömbnek tekintjük.

A2. A T_k kritikus hőmérséklet fölött minden izoterma mentén a p nyomás szigorúan monoton csökkenő függvénye a V térfogatnak, $T < T_k$ esetén pedig a $p(V)$ függvénynek van egy növekedő szakasza. A kritikus izotermának a (V_k, p_k) kritikus pontban vízszintes inflexiós pontja van, tehát

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{T=T_k}(V_k) = 0, \quad \left(\frac{d^2p}{dV^2}\right)_{T=T_k}(V_k) = 0.$$

Az (1) állapotegyenlet alapján

$$p(V) = \frac{RT_k}{V - b} - \frac{a}{V^2},$$

ahonnan deriválással a

$$-\frac{RT_k}{(V_k - b)^2} + \frac{2a}{V_k^3} = 0, \quad \frac{2RT_k}{(V_k - b)^3} - \frac{6a}{V_k^4} = 0$$

egyenletrendszert kapjuk. Innen kifejezhetőek a kritikus állapotjelzők az a és b paraméterek függvényében:

$$V_k = 3b, \quad T_k = \frac{8a}{27Rb}, \quad p_k = \frac{a}{27b^2},$$

majd megkaphatók a keresett összefüggések is:

$$(3) \quad a = \frac{27R^2T_k^2}{64p_k}, \quad b = \frac{RT_k}{8p_k}.$$

A3. A (3) egyenletekbe a megadott $T_k = 647$ K és $p_k = 2,2 \cdot 10^7$ Pa értékeket behelyettesítve adódik víz esetén az eredmény:

$$(4) \quad a_{\text{víz}} = 0,56 \frac{\text{m}^6 \cdot \text{Pa}}{\text{mol}^2}, \quad b_{\text{víz}} = 3,1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}.$$

A4. A (2) egyenlet alapján

$$(5) \quad d_{\text{víz}} = \sqrt[3]{\frac{6b_{\text{víz}}}{\pi N_A}} = 4,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

B rész. Gáz- és folyadékfázis tulajdonságai. Ebben a részben $T = 100$ °C = 373 K hőmérsékletű, $p_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Pa nyomású vízzel (illetve vízgőzzel) foglalkozunk, tehát a T és p_0 mennyiségek ismert konstansok. A van der Waals-egyenletben szereplő a és b konstansok helyére mindenütt a (4) egyenletben kapott $a_{\text{víz}}$ és $b_{\text{víz}}$ értékeket helyettesítjük.

B1. A $b \ll V_G$ feltevés mellett a van der Waals-gáz (1) állapotegyenlete egy V -ben másodfokú egyenletre egyszerűsödik:

$$\left(P + \frac{a}{V_G^2}\right)V_G = RT \implies PV_G^2 - RTV_G + a = 0.$$

Az adott $T = 100$ °C hőmérsékleten és $p_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Pa nyomáson a másodfokú egyenlet nagyobbik gyöke adja meg a gőz móltérfogatát, tehát

$$(6) \quad V_G = \frac{RT}{2p_0} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2T^2}}\right) \approx \frac{RT}{p_0} - \frac{a}{RT} = 3,1 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}.$$

A közelítésnél felhasználtuk, hogy $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$, ha $|\varepsilon| \ll 1$. Esetünkben $|\varepsilon| = \frac{4ap_0}{R^2T^2} = 0,023 \ll 1$, így a közelítés hibája (mely ε^2 -tel arányos) kisebb, mint 1%. Látható, hogy $\frac{V_G}{b} = 10^3$, így valóban teljesül a kiindulásnál használt $b \ll V_G$ feltétel.

B2. Az ideális gáz állapotegyenletéből a $V_{G0} = \frac{RT}{p_0}$ kifejezés adódik a móltérfogatra, így a relatív eltérés

$$\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2T^2}}\right) \approx \frac{ap_0}{R^2T^2} = 0,58 = 58\%.$$

B3. A belső stabilitást leíró $\frac{dp}{dV} < 0$ feltétel egyszerűen megérthető; ha ez nem teljesülne, akkor térfogatsökkenéshez nyomáscsökkenés tartozna, ami újabb térfogatsökkenést eredményezne, tehát a gáz „összeesne”, megindulna a kondenzáció.

A gőz állapotban teljesülő $b \ll V$ feltétel mellett a van der Waals gáz nyomása $p(V) = \frac{RT}{V} - \frac{a}{V^2}$, így a maximális túlhűtéshez tartozó $V_{G, \min}$ minimális móltérfogat a

$$\left(\frac{dP(V_{G, \min})}{dV}\right)_{T=\text{áll.}} = \frac{-RT}{V_{G, \min}^2} + \frac{2a}{V_{G, \min}^3} = 0 \quad \text{egyenletből} \quad V_{G, \min} = \frac{2a}{RT}.$$

A (6) eredmény felhasználásával a keresett hányados:

$$\frac{V_G}{V_{G, \min}} \approx \frac{R^2T^2}{2ap_0} - \frac{1}{2} \approx \frac{R^2T^2}{2ap_0} = 86.$$

B4. Folyadék halmazállapotban a móltérfogat kicsi, $p \ll \frac{a}{V_F^2}$, így a van der Waals gáz (1) állapotegyenlete most is egy másodfokú egyenletre egyszerűsödik:

$$\frac{a}{V_F^2}(V_F - b) = RT \implies RTV_F^2 - aV_F + ab = 0,$$

aminek a kisebbik gyöke adja meg a folyadék fajlagos térfogatát:

$$(7) \quad V_F = \frac{a}{2RT} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4RTb}{a}} \right) = 4,0 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}.$$

A kapott értékkel számolva $\frac{a}{p_0 V_F^2} = 3,5 \cdot 10^3$, tehát valóban teljesül a kiindulásnál használt $p \ll \frac{a}{V_F^2}$ feltétel.

B5. A víz sűrűsége:

$$(8) \quad \rho_F = \frac{\mu}{V_F} = \frac{1,8 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{4,0 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}} = 4,5 \cdot 10^2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Látható, hogy a kapott érték csak nagyságrendi becslés.

B6. Célszerű a (7) kifejezést T -ben hatványsorba fejteni. Felhasználva, hogy $\sqrt{1 - \varepsilon} \approx 1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2$, ha $|\varepsilon| < 1$, $\varepsilon = \frac{4RTb}{a} = 0,69$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$V_F \approx \frac{a}{2RT} \left(\frac{2RTb}{a} + \frac{2R^2 T^2 b^2}{a^2} \right) = b + \frac{RTb^2}{a} \approx b.$$

A folyadék móltérfogata első közelítésben a b paraméterrel egyezik meg, ami a részecskék saját térfogata. Az $\varepsilon = 0,69$ érték egynél kisebb, de nem jóval kisebb, ezért a közelítés nem igazán pontos; a (7) egyenletben kapott érték mintegy 25%-kal eltér a (4) egyenletben szereplő b értéktől.

A térfogati hőtágulási együttható számolásához a V_F másodrendű közelítését kell használni:

$$\alpha = \frac{1}{V_F} \frac{\Delta V_F}{\Delta T} = \frac{Rb^2}{V_F a} \approx \frac{Rb}{a} = 4,6 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{K}}.$$

B7. A forráshő pontos meghatározásához szükségünk van a van der Waals gáz másik, úgynevezett *kalorikus állapotegyenletére*, mely az U moláris belső energiát adja meg a hőmérséklet és móltérfogat függvényében:

$$(9) \quad U = c_V T - \frac{a}{V},$$

ahol a c_V konstans a gáz állandó térfogaton mért mólhője. A víz (tömegegységre vonatkoztatott) forráshője a termodinamika I. főtételét felhasználva

$$L = \frac{Q}{\mu} = \frac{\Delta U - W}{\mu}$$

alakban írható, ahol $\mu = 1,8 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$ a víz móltömege és Q , illetve W egy mól víz elforrálásához szükséges hő, illetve munka. Minthogy a forralás során a nyomás és a hőmérséklet állandó,

$$\Delta U = U_G - U_F = -\frac{a}{V_G} + \frac{a}{V_F}, \quad -W = \int_{V_F}^{V_G} p_0 dV = p_0(V_G - V_F).$$

Ezeket beírva a forráshő képletébe, majd figyelembe véve, hogy $V_F \ll V_G$:

$$(10) \quad L = \frac{a}{\mu} \left(\frac{1}{V_F} - \frac{1}{V_G} \right) + \frac{p_0}{\mu} (V_G - V_F) \approx \underbrace{\frac{a}{\mu V_F}}_{7,78 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}} + \underbrace{\frac{p_0 V_G}{\mu}}_{1,72 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}} = 9,5 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}.$$

Az eredménynek most is csak a nagyságrendje helyes; a víz forráshője $2,26 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

A fenti gondolatmenethez szükséges a (9) egyenlet ismerete, ami nem volt megadva a feladatban, azonban (mélyebb termodinamikai összefüggések felhasználásával) következik (1) állapotegyenletből, és abból a feltételből, hogy híg gáz határesetben a van der Waals gáz viselkedése az ideális gázéhoz közelít.

Igen elnagyoltan a következőképpen is eljuthatunk a forráshő becsléséhez. A forraláshoz szükséges hő egyrészt a táplálási munkát fedezi, másrészt az egymással vonzó kölcsönhatásban levő részecskék eltávolításához szükséges.

A tágulási munka éppen a (10) egyenlet második tagja. A vonzó kölcsönhatást (1) állapotegyenletben a nyomást korrigáló $\frac{a}{V^2}$ tag írja le, tehát ezen nyomás ellen végzett térfogati munka adja meg a részecskék kölcsönhatási energiájának megváltozását. Ez a (10) egyenlet első tagját adja, hiszen

$$\int_{V_F}^{V_G} \frac{a}{V^2} dV = \left[\frac{-a}{V} \right]_{V_F}^{V_G} = \frac{a}{V_F} - \frac{a}{V_G}.$$

A számértékekből látszik, hogy ez a tag adja a forráshő nagyobb részét. A tágulási munkát elhanyagolva, a $V_F \approx b$ közelítéssel

$$(11) \quad L \approx \frac{a}{\mu b} = 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

adódik.

B8. Képzeljük el, hogy m tömegű vizet elforralunk, illetve „kilapítunk” egyetlen molekula, azaz $d_{\text{víz}}$ vastagságú réteggé. Első esetben Lm hőt kell befektetnünk. Második esetben a folyadék felszíne $A = \frac{2m}{\rho_F d_{\text{víz}}}$ -re nő, tehát $A\sigma = \frac{2m\sigma}{\rho_F d_{\text{víz}}}$ munkát kell végeznünk. A két energia jó közelítéssel megegyezik, hiszen mindkettő lényegében a részecskék közti kötések felszakításához szükséges. A korábbi (4), (5), (8) és (11) eredmények felhasználásával:

$$Lm \approx \frac{2m\sigma}{\rho_F d_{\text{víz}}} \implies \sigma \approx \frac{1}{2} L \rho_F d_{\text{víz}} \approx \frac{a d_{\text{víz}}}{2b^2} = 0,1 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

C rész. Folyadék-gáz rendszer

C1. A kapilláris csőben levő vízfelszínre írjuk föl a nyomások egyensúlyát! A víz h mélységben mérhető $\rho_F gh$ hidrosztatikai nyomásával tart egyensúlyt a csőben levő gőz $\rho_G gh$ hidrosztatikai nyomása és a felületi feszültségből származó $\frac{2\sigma}{r}$ nyomás, tehát

$$\rho_F gh = \rho_G gh + \frac{2\sigma}{r} \implies h = \frac{2\sigma}{(\rho_F - \rho_G)gr} \approx \frac{2\sigma}{\rho_F gr}.$$

A nyomásnövekedés a h magasságú gőzoszlop hidrosztatikai nyomásával egyezik meg, tehát

$$(12) \quad \Delta p_T = \rho_G gh = \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_G}{\rho_F - \rho_G} \approx \frac{2\sigma \rho_G}{r \rho_F}.$$

C2. A megadott egyenletek alapján a telített vízgőz nyomásának hőmérsékletfüggése:

$$p_{\text{FG}}(T) = e^A \cdot e^{\frac{B}{T}} = \frac{a}{b^2} e^{-\frac{a}{bRT}}^{-1},$$

ahonnan differenciálással azt kapjuk, hogy

$$p_{\text{FG}}(T_0 - \Delta t) \approx p_0 - p'_{\text{FG}}(T_0) \Delta t = p_0 \left(1 - \frac{a \Delta t}{bRT_0^2} \right),$$

tehát $\Delta t = 5^\circ\text{C}$ hőmérséklet-csökkenés esetén a telített gőz nyomása $\Delta p_{\text{FG}} = p_0 \frac{a \Delta t}{bRT_0^2}$ értékkel csökken. Ugyanakkor a kicsiny r görbületi sugár a (12) egyenlet értelmében megnöveli a telített gőz nyomását. A két egyenlet összevetéséből adódik a cseppképződéshez szükséges minimális görbületi sugár:

$$\Delta p_T = \Delta p_{\text{FG}} \implies \frac{2\sigma \rho_G}{r \rho_F} = p_0 \frac{a \Delta t}{bRT_0^2} \implies r = \frac{2\sigma \rho_G bRT_0^2}{a p_0 \rho_F \Delta t}.$$

Ha a telített gőzt ideális gáznak tekintjük, akkor sűrűsége $\rho_G = \frac{\mu p_0}{RT_0}$, a folyadék víz sűrűsége pedig korábbi (8) eredményünk alapján $\rho_F \approx \frac{\mu}{b}$. Ezeket felhasználva a következő eredményt kapjuk:

$$r = \frac{2\sigma b^2}{a} \frac{T_0}{\Delta t} = 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}.$$

3. feladat. A gázkisülés legegyszerűbb modellje

A rész. Nem önfenntartó gázkisülés

A1. Minthogy az elektronok és ionok párokban keletkeznek, sűrűségük minden időpillanatban megegyezik, $n_e(t) = n_i(t) = n(t)$. Az elektronok sűrűsége a külső besugárzás miatt nő, a rekombináció miatt csökken, így az

$$\dot{n}(t) = Z_{\text{ext}} - Z_{\text{rek}} = Z_{\text{ext}} - rn^2$$

differenciálegyenlet írható föl. A feladat szerint az egyenlet megoldását $n(t) = n_0 + a \tanh(bt)$ alakban kereshetjük. Az $n(0) = 0$ kezdeti feltétel miatt $n_0 = 0$. Ezután az $n(t) = a \tanh(bt)$ függvényt beírva a differenciálegyenletbe, figyelembe véve, hogy $\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x}$, valamint, hogy $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, rövid számolás után azt kapjuk, hogy

$$a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}, \quad b = \sqrt{rZ_{\text{ext}}}.$$

A2. Egyetlen, Z_{ext} erősségű külső ionizáló esetén az egyensúlyi elektronsűrűség

$$(13) \quad n_e = \lim_{t \rightarrow \infty} a \tanh(bt) = a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}},$$

ahonnan $Z_{\text{ext}} = rn_e^2$, tehát két ionizálót együtt használva $Z_{\text{ext},1} + Z_{\text{ext},2} = rn_e^2$, így

$$n_e = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext},1}}{r} + \frac{Z_{\text{ext},2}}{r}} = \sqrt{n_{e1}^2 + n_{e2}^2} = 2 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^3}.$$

A3. Minthogy az elektronok és ionok sűrűsége és mobilitása is megegyezik, a két töltéshordozó mozgásából származó elektromos áram is megegyezik, tehát $I = I_e + I_i = 2I_e$. Az L hosszú, S keresztmetszetű csőben levő elektronok száma egyrészt a besugárzás miatt LSZ_{ext} -tel nő, másrészt, a rekombináció, illetve a kiáramlás miatt $SLrn_e^2$ -tel, illetve vSn_e -vel csökken időegységenként. Egyensúly esetén az elektronok száma nem változik, tehát

$$SLZ_{\text{ext}} - SLrn_e^2 - vSn_e = 0.$$

Felhasználva, hogy az elektronok driftsebessége $v = \beta E = \beta \frac{U}{L}$, a másodfokú egyenlet pozitív megoldása n_e -re:

$$(14) \quad n_e = \frac{\beta U}{2rL^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4rL^4 Z_{\text{ext}}}{\beta^2 U^2}} - 1 \right).$$

A keresett áramerősség:

$$(15) \quad I = 2I_e = 2en_e v S = \frac{eS\beta^2 U^2}{rL^3} \left(\sqrt{1 + \frac{4rL^4 Z_{\text{ext}}}{\beta^2 U^2}} - 1 \right).$$

A4. Kis U feszültség esetén (15) kifejezésben a gyökjel alatti második tag mellett az első, +1 tag, és a gyökvonás után a -1 is elhanyagolható, tehát ekkor

$$I \approx \frac{eS\beta^2 U^2}{rL^3} \sqrt{\frac{4rL^4 Z_{\text{ext}}}{\beta^2 U^2}} = \frac{2eS\beta U}{L} \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}.$$

(Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha a (15) egyenletben az n_e elektronsűrűség helyére nem a (14) kifejezést, hanem a zérus feszültség mellett kapott (13) értéket helyettesítjük.)

Ezt felhasználva a gáz fajlagos ellenállása:

$$\rho = \frac{US}{IL} = \frac{1}{2e\beta} \sqrt{\frac{r}{Z_{\text{ext}}}}.$$

B rész. Önfenntartó gázkisülés. Ebben a részben az egyensúlyi áramot tanulmányozzuk, így az elektronok n_e és az ionok n_i sűrűsége nem függ az időtől, viszont az elektronlavina miatt függ a helytől. A feladat feltevése értelmében az $E = \frac{U}{L}$ elektromos tér a cső mentén homogén, és az elektronok valamint ionok sebessége $v = \beta E$ állandó.

B1. Ahogy a feladatban szerepel, az x tengely mutasson az L hosszúságú gázcső mentén a növekvő elektromos potenciál irányába, azaz az elektronok mozgásának irányába. Az x és $x + dx$ közti szeletben levő elektronok száma egyrészt a besugárzás miatt $Z_{\text{ext}}Sdx$ -szel, az elektronok beáramlása miatt $vSn_e(x)$ -szel, az elektronlavina miatt pedig

$\alpha v S n_e(x) dx$ -szel nő, másrészt, az elektronok kiáramlása miatt $v S n_e(x + dx)$ -szel csökken időegységenként. Állandósult áramlás esetén azonban a teljes elektronszám nem változik, tehát

$$0 = \underbrace{Z_{\text{ext}} S dx}_{\text{besugárzás}} + \underbrace{v S n_e(x)}_{\text{beáramlás}} + \underbrace{\alpha v S n_e(x) dx}_{\text{elektronlavina}} - \underbrace{v S n_e(x + dx)}_{\text{kiáramlás}}.$$

Az egyenletet dx -szel osztva, és felhasználva, hogy az elektronok által képviselt áram $I_e(X) = e v S n_e(x)$, az

$$I_e'(x) = e S Z_{\text{ext}} + \alpha I_e(x)$$

differentiálegyenletet kapjuk, melybe behelyettesítve a megadott $I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2$ kísérletező függvényt, rövid számolás után az

$$(16) \quad A_1 = \alpha, \quad A_2 = -\frac{e S Z_{\text{ext}}}{\alpha}, \quad I_e(x) = C_1 e^{\alpha x} - \frac{e S Z_{\text{ext}}}{\alpha}$$

eredmények adódnak. (A képletekben e az elemi töltés, e pedig az Euler-féle szám.)

B2. Gondolatmenetünk az elektronáram esetéhez hasonló; állandósult áramlás esetén az x és $x + dx$ közti szeletben az ionok száma nem változik, tehát

$$0 = \underbrace{Z_{\text{ext}} S dx}_{\text{besugárzás}} - \underbrace{v S n_i(x)}_{\text{kiáramlás}} + \underbrace{\alpha v S n_e(x) dx}_{\text{elektronlavina}} + \underbrace{v S n_i(x + dx)}_{\text{beáramlás}}.$$

(Az ionok ellentétes mozgása miatt a második és negyedik tag előjele megváltozott, és az elektronlavinát leíró tagban nem n_i , hanem továbbra is n_e szerepel!) Innen az elektronáramra kapott (16) eredményt is felhasználva az

$$I_i'(x) = -e S Z_{\text{ext}} - \alpha I_e(x) = -\alpha C_1 e^{\alpha x}$$

összefüggés adódik, amit az adott $I_i(x) = C_2 + B_1 e^{B_2 x}$ formulával összevetve a

$$(17) \quad B_1 = -C_1, \quad B_2 = \alpha, \quad I_i(x) = C_2 - C_1 e^{\alpha x}$$

eredményhez jutunk.

B3. Mivel az anódból nem lépnek ki ionok, ezért $I_i(L) = 0$.

B4. A másodlagos elektronkeltés definíciójának értelmében $I_e(0) = \gamma I_i(0)$.

B5. Az előző két pontban kapott határfeltételekbe beírva a (16) és (17) formulákat megkaphatjuk a hiányzó C_1 és C_2 együtthatókat:

$$\left. \begin{aligned} C_2 - C_1 e^{\alpha L} &= 0 \\ C_1 - \frac{e S Z_{\text{ext}}}{\alpha} &= \gamma (C_2 - C_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= \frac{e S Z_{\text{ext}}}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \gamma(1 - e^{\alpha L})} \\ C_2 &= \frac{e S Z_{\text{ext}}}{\alpha} \cdot \frac{1}{e^{-\alpha L}(1 + \gamma) - \gamma}. \end{aligned}$$

A teljes áram az ionok és az elektronok járulékanak összege. Ahogy várjuk, ez már nem függ az x helytől, és értéke:

$$(18) \quad I = I_e(x) + I_i(x) = C_2 - \frac{e S Z_{\text{ext}}}{\alpha} = \frac{e S Z_{\text{ext}}}{\alpha} \left(\frac{1}{e^{-\alpha L}(1 + \gamma) - \gamma} - 1 \right).$$

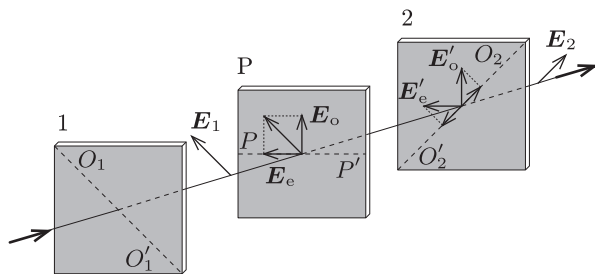
B6. Elég hosszú cső esetén az elektronlavinából keletkező elektronok elegendő töltéshordozót biztosítanak az áram fenntartásához (sőt, növeléséhez) külső gerjesztés nélkül is. A (18) képletből látszik, hogy ahogy L értékét növeljük, I nő, és $L \nearrow L_{\text{kr}}$ esetén $I \rightarrow \infty$. Az L_{kr} kritikus hossz a (18) képletben szereplő tört nevezőjének zérushelye:

$$e^{-\alpha L_{\text{kr}}}(1 + \gamma) - \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad L_{\text{kr}} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{1 + \gamma}{\gamma} \right).$$

Kísérleti feladat: Látni a láthatatlant

A mérési feladat címe és témája nagyon izgalmas: Az optikai anizotrópia jelensége lehetővé teszi, hogy polarizált fény segítségével megfigyeljünk „láthatatlan” jelenségeket. (Sajnos a mérési eszközök kivitelezése és a feladatok nem elég részletes megfogalmazása a versenyzők többségének megnehezítette a mérés elvégzését és a jelenségek megértését.)

Sok anyag optikailag anizotrop, ami azt jelenti, hogy a törésmutató függ a fényterjedés és a polarizáció irányától. Optikailag izotrop anyag is anizotroppá válhat mechanikai feszültség, egyenetlen melegítés vagy külső elektromos tér hatására. A kristály optikai tengelyének azt az irányt nevezzük, amely mentén a fény a kristályban kettőtörés nélkül halad. A 3. ábrán látható a kettőtörés jelenségét vizsgáló optikai elrendezés vázlata.



3. ábra. Az optikai anizotrópia vizsgálatára szolgáló elrendezés vázlata

A fénysugár az 1-es polárszűrőre esik, melynek áteresztési síkja az $O_1O'_1$ egyenesben metszi a polárszűrő síkját. Az 1-es polárszűrőn való áthaladás után a fény lineárisan poláros lesz, és az $\mathbf{E}_1$ elektromos térerősség vektora az 1-es polarizátor áteresztési síkjában fog rezegni. Ezután a fény az anizotrop P lemezre esik, melynek PP' irányú optikai tengelye 45° -os szöget zár be az 1-es polárszűrő átengedési síkjával. A P lemezben ekkor két különböző fényhullám keletkezik: az $\mathbf{E}_o$ ordinárius sugár polarizációs iránya a lemez optikai tengelyére merőleges, az $\mathbf{E}_e$ extraordinárius sugáré pedig azzal párhuzamos. A két hullámra vonatkozó törésmutató különbözik, különbségük: $\Delta n = n_o - n_e$. Emiatt a két hullám között a lemezen való áthaladás és a kilépés után $\Delta\varphi = 2\pi h \Delta n / \lambda$ fáziskülönbség lesz (h a lemez vastagsága, λ a fény hullámhossza vákuumban), és így a kilépő fény elliptikusan poláros lesz. Ez a fénysugár esik a 2-es polárszűrőre, melynek $O_2O'_2$ áteresztési síkja merőleges az 1-es polárszűrő áteresztési síkjára.

Könnyen belátható, hogy a P lemezen és a 2-es polárszűrőn áthaladó fény intenzitása

$$I_2 = k I_0 \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2},$$

ahol I_0 a lemezre eső fény intenzitása, k a P lemez és a 2-es polarizátor fényáteresztési együtthatója, $\Delta\varphi$ pedig az ordinárius és extraordinárius sugár közti fáziskülönbség a P lemezen való áthaladás után.

1. rész: Kvalitatív megfigyelés

A versenyzőknek először kvalitatív megfigyeléseket kellett végezniük. Ebben a részben egy fehér LED volt a fényforrás, és a 3. ábrán látható elrendezésben a két egymásra merőleges áteresztési síkú polárszűrő közé különböző műanyag vonalzókat, görbült fóliacsíkokat és folyadékkristály cellát (LCC) kellett helyezni, majd a megfigyelt jelenségeket leírni.

A vonalzóknak a mechanikai feszültség, a görbült fóliacsíkokban a változó vastagság, az LCC-ben a rákapcsolt feszültség hatására változó optikai anizotrópia figyelhető meg. (A folyadékkristály az anyag olyan állapota, mely a kristályos szilárd és amorf folyadék között van. A folyadékkristály molekuláinak orientációja könnyen állítható és szabályozható elektromos térrel. A folyadékkristály cella optikailag anizotrop, kétféle törésmutatója van. A jelenség mértéke függ az alkalmazott váltakozó feszültségtől. Az LCC két üveglapból áll, melyek belső felületét átlátszó vezető réteg borítja. A lemezek közt van egy körülbelül $10 \mu\text{m}$ vastagságú folyadékkristály oldat. A lemezekhez kivezetéseket forrasztanak, amivel egy tápegységre lehet kapcsolni őket. Ha nem kapcsolunk rá feszültséget, a folyadékkristály hosszú molekulái a lemezekkel párhuzamosak. (A hosszúkás molekulák iránya egybeesik a kristály optikai tengelyével.)

Mivel a jelenségek hullámhosszfüggők, a fényforrás fehér fényének összetevői különböző mértékben gyengülnek: színes csíkok és foltok jelennek meg.

2. rész: A mérés

A feladat második, hosszabb részében kvantitatív méréseket végeztek a versenyzők. A fehér LED helyett egy (piros) lézerdíóda volt a fényforrás, az átmenő fény intenzitását pedig egy fotodetektorral lehetett mérni.

A fotodetektor egy fotodiódából, egy terhelő ellenállásból és egy voltmérőből áll. Először ezt az eszközt kellett vizsgálni: megállapítani, hogy milyen terhelő ellenállással működik optimálisan. Ezután az így beállított eszközzel különböző anizotrop anyagokon végezhetek méréseket a diákok.

A műanyag vonalzóknak a gyártás során mechanikai feszültség keletkezik, amely az anyagban helytől függő anizotrópiát okoz. Emiatt a vonalzót a 3. ábrán látható mérési elrendezéssel vizsgálva a hely függvényében változó intenzitás mérhető. Ebből meg lehet határozni az ordinárius és extraordinárius sugár közti $\Delta\varphi$ fáziskülönbség helyfüggését. A tapasztalat szerint a fáziskülönbség a hely lineáris függvénye, ami viszont az intenzitás szinusznégyzetes változását okozza. A mérésben ennek a szinusznégyzetes függvénynek egy kis darabja mérhető ki, és ebből lehetett következtetni a fáziskülönbségre (ami nem volt könnyű feladat).

Ezután a versenyzőknek egy folyadékkristály cellát kellett vizsgálniuk. A cella anizotrópiája akkor maximális, ha a cella nem kap feszültséget. Ha a cellára egyre nagyobb (váltó)feszültséget kapcsolunk, az anizotrópia (a törésmutatók közötti különbség, és így a fázistolás) monoton (de nemlineárisan) csökken, és emiatt az átmenő intenzitás nulla és egy maximális érték között oszcillál. A mérés alapján közvetlenül ez az oszcilláló függvény (az intenzitás a cellára kapcsolt

feszültség függvényében) rajzolható fel, majd ebből lehet következtetni a maximális fázistolás nagyságára és a fázistolás feszültségtől való függésére. (A feszültségfüggés a tapasztalat szerint egy bizonyos tartományban hatványfüggvény: a versenyzőknek a hatványfüggvény kitévőjét is meg kellett határozniuk.)

Az utolsó mérési feladat egy görbült fóliacsík vizsgálata volt. Ebben az esetben az anyag anizotrópiája mindenhol ugyanakkora volt, de a görbület miatt a fény a fóliacsík különböző helyein más-más utat tesz meg a fóliacsíkon belül, és emiatt itt is helyfüggő fáziskülönbség alakul ki. Mért most is az intenzitás változását lehetett, és ismét ebből kellett következtetni a fáziskülönbség változására (minden részfeladatban ez a legnehezebb lépés).

A mérés alapján meghatározható a nem görbülő fóliacsík fázistolása, valamint a fóliacsík görbületi sugara.