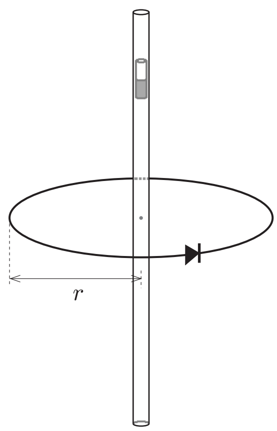
Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny [1]

1. forduló, elméleti rész[2]
Budapest, 2014. április 14.

1. feladat. Ez a feladat három független, kisebb részből áll. (50 p + 50 p + 50 p)

1.A. $T_1 = 100$ K hőmérsékletű környezetben egy levegővel telt, zárt tartály helyezkedik el. A tartályban lévő levegőt egy ideális Carnot-gépnek tekinthető hűtőgéppel szeretnénk minél alacsonyabb hőmérsékletűre hűteni. Maximális hűtési fokozaton (amikor a hűtőgép az általa felvehető legnagyobb elektromos teljesítményt veszi fel) a tartályban $T_2 = 50$ K hőmérsékletet sikerül elérni. Mekkora T_2' értékű lenne a tartályban elérhető legalacsonyabb hőmérséklet, ha a környezet hőmérséklete $T_1' = 200$ K lenne? (A hűtőgép ebben az esetben is maximális fokozaton működik, a hősugárzás elhanyagolható.)



1.B. R ellenállású drótból és egy ideálisnak tekinthető diódából r sugarú zárt karikát készítünk. A karikát vízszintes síkban tartjuk, a középpontján pedig egy függőleges tengelyű, hosszú üvegcsövet vezetünk át az *ábra* szerint. Mekkora töltés halad át a diódán, ha az üvegcsőbe m dipólnyomatékú, kicsiny mágnesrudat ejtünk?

(A vezető karika önindukciója elhanyagolható. Az ideális dióda az áramot az egyik irányban ellenállás nélkül átengedi, míg a másik irányban szakadásként működik.)

1.C. Kísérletekben általában úgy állítanak elő pionokat (π^+), hogy nagy hidrogéntartalmú anyagra nagyenergiás protonnyalábot irányítanak, melynek következtében az állónak tekinthető hidrogénmagok és a beérkező gyors protonok között a következő reakció megy végbe:

$$p^+ + p^+ \longrightarrow p^+ + n^0 + \pi^+.$$

Legalább mekkora *kinetikus* energiával kell rendelkeznie a beeső protonoknak, hogy a fenti reakció végbemenjen? A választ adjuk meg paraméteresen is a proton m_p tömegével, a neutron m_n tömegével, a pion m_π tömegével, valamint a c vákuumbeli fénysebesség felhasználásával!

A fizikai állandók ismeretében határozzuk meg a minimális kinetikus energiát MeV egységekben!

2. feladat. A Föld és a Hold mozgásának szinkronizálódása. (150 p)

Közismert tény, hogy a Hold mindig ugyanazt az oldalát mutatja a Föld felé. Ez az érdekesség nem véletlen egybeesés, hanem a Föld által a Holdra ható árapályerők közvetlen következménye: az árapályerők ugyanis az idők folyamán folyamatosan fékezték a Hold tengelykörüli forgását egészen addig, amíg annak periódusideje egyenlővé vált a Föld körüli keringésének periódusidejével.

---

[1] Kunfalvi Rezső (1905–1998) a Nemzetközi Fizikai Diákolimpiák egyik alapítója és sok éven keresztül a magyar csapat felkészítője, vezetője volt. 1959-től 1975-ig ő szerkesztette a KöMaL (korábban KML) fizika „rovatát”. Emlékét az olimpiai válogatóverseny is őrzi.

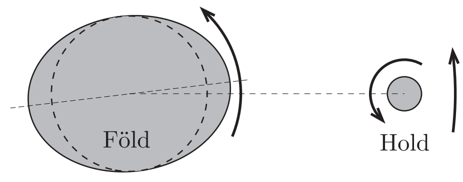
[2] Az elméleti forduló időtartama 5 óra volt. A feladatok hibátlan megoldásával összesen 450 pontot lehetett szerezni. Az összes feladathoz egyetlen, közös adattáblázat tartozik, (lásd a feladatsor végét), ami a feladatokban szereplő konstansokat, fizikai állandókat tartalmazza.

A feladatok megoldásához író- és rajzeszközökön, valamint kétsoros (nem grafikus) számológépen kívül semmilyen segédeszköz (könyv, füzet, internet, számítógép, mobiltelefon stb.) nem volt használható.

A verseny igyekezett követni a Nemzetközi Fizikai Diákolimpia elméleti versenyeinek stílusát, nehézségi fokát, és azok formai követelményeihez igazodott.

A feladatokat Vigh Máté (ELTE), a magyar csapat egyik felkészítője állította össze.

A feladatok rövid megoldását a szeptemberi számunkban közöljük.



Teljesen hasonló fékezési mechanizmus miatt a Föld tengelykörüli forgása is lassul, melynek magyarázata a következő. A Hold nagyobb gravitációs vonzóerőt fejt ki a Föld azon pontjaira, amelyek a Holdhoz közelebb helyezkednek el, mint azokra a pontokra, amelyek a Holdtól távolabb vannak. Ennek következtében a Föld (nagyon kicsiny mértékben) „megnyúlik”, forgási ellipszoiddá alakul (lásd az *ábrát*). Az ellipszoid nagytengelye azonban a Föld kőzeteinek belső súrlódása és a Föld tengelykörüli forgása következtében nem a Hold aktuális irányába mutat, hanem ahhoz képest folyamatosan „siet”. Az így keletkezett dudorokra a Hold gravitációs tere forgatónyomatékot gyakorol, ami lassítja a Föld forgását.

Figyelem! A következő feladatok során a Föld Nap körüli mozgásától tekintsünk el! Mindvégig használjuk azt a közelítést, hogy a földi Egyenlítő, a Hold egyenlítője és a Hold pályasíkja egy síkban van! A Föld tömegeloszlása nem egyenletes, tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát az adattáblázat tartalmazza. A Holdat tekinthetjük homogén tömegeloszlású gömbnek, a holdpályát pedig kör alakúnak.

2.1. A Föld–Hold rendszer perdülete négy tag összegeként számolható. Ezek rendre a Földnek a tengelye körüli forgásából származó $N^{\text{Föld}}_{\text{saját}}$ sajátperdülete, a Föld közös tömegközéppont körüli keringésből származó $N^{\text{Föld}}_{\text{pálya}}$ pályaperdülete, a Hold $N^{\text{Hold}}_{\text{saját}}$ sajátperdülete, illetve a Hold $N^{\text{Hold}}_{\text{pálya}}$ pályaperdülete. Határozzuk meg a négy tag számszerű értékét! (20 p)

2.2. A Föld–Hold rendszer pálya- és sajátperdületéből csak a két legdominánsabb tagot megtartva határozzuk meg, hogyan aránylik egymáshoz a Föld és a Hold mozgási energiájának $\Delta E_{\text{kin}}/\Delta t$ csökkenési üteme! A választ adjuk meg paraméteresen (a Hold keringésének Ω szögsebességével és a Föld tengelykörüli forgásának ω szögsebességével kifejezve), és számszerűen is! (50 p)

Útmutatás: A Föld-Hold távolság olyan lassan változik, hogy a mozgás során a Hold pályája mindvégig körnek tekinthető.

2.3. Az Apolló-program keretében többek között lézertükröt is juttattak a Holdra. Az ezzel végzett igen pontos mérések szerint a Hold évente 3,8 cm-t távolodik a Földtől. A mért adat alapján becsüljük meg, mennyit változik a Föld mozgási energiája és a Hold mozgási energiája évente! (30 p)

2.4. A számítások szerint az árapályerők fékezési hatása következtében hosszú idő elteltével a Föld is mindig ugyanazt az oldalát fogja a Hold felé mutatni, a két égitest forgása és egymás körüli keringése szinkronizálódik. Hányszorosára fog növekedni addigra a földi nap hossza? (30 p)

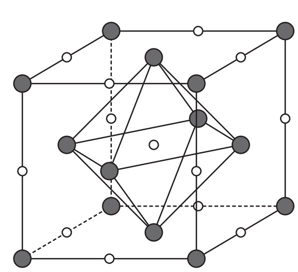
2.5. A teljes szinkronizáció befejeződésekor mekkora lesz a Föld és a Hold közötti távolság? (20 p)

Megjegyzés. A Naprendszerben több példát is találhatunk olyan égitest-párokra, melyeknél a teljes szinkronizáció már bekövetkezett. Az egyik legismertebb a Plútó törpebolygó és egyetlen holdja, a Charon.

3. feladat. Müon spin rotáció (μSR) (150 p)

A müonok töltött elemi részecskék, amelyek elsősorban a kozmikus sugárzás hatására keletkeznek a légkör felsőbb rétegeiben. A tömegük 206-szor nagyobb az elektron tömegénél, töltésük szempontjából pedig kétfélék lehetnek: létezik pozitív müon (μ^+) és negatív müon (μ^-), melyek egymás antirészecskéi, töltésük nagysága pedig az elemi töltés. A kísérleti szilárdtestfizikában a pozitív müonoknak jóval nagyobb jelentőségük van, mint antirészecskéiknek.

Ebben a feladatban a müon spin rotációnak (röviden μSR) nevezett kísérleti módszerrel ismerkedünk meg, amelynek segítségével a kristályos anyagok belsejében jelenlévő mágneses teret lehet megmérni a μ^+-részecskék segítségével. Ha egy kristályos szerkezetű, szilárd anyagba μ^+-részecskét juttatunk, akkor a müon (a kristályt alkotó, pozitív töltésű rácsionok hatására) a rácspontok közötti, ún. intersticiális (rácsközi) helyekre kényszerül (lásd az *1. ábrát*). Ezen a helyen a müon mágneses momentuma kölcsönhatásba lép a rácsközi helyen jelenlévő, a környező rácsionok által keltett mágneses térrel, így a müon mikroszkopikus magnetométerként használható. A kristályban jelenlévő hosszú távú rend miatt a rácsközi helyek egyenértékűek, ezért a mágneses tér nagysága és iránya minden intersticiális helyen azonos.



1. ábra. A nikkel kristály elemi cellája. A szürke körök jelzik a Ni-atomokat, az üres körök pedig az intersticiális (rácsközi) helyeket, ahova a müonok beülhetnek.

3.1. Tekintsünk egy klasszikus, homogén tömegeloszlású, egyenletesen töltött, tömör szigetelő golyót, melynek tömege M, töltése pedig Q! Ha a golyót a tömegközéppontja körül forgásba hozzuk, a golyó $\boldsymbol{m}$ mágneses momentumra tesz szert, melynek nagysága arányos a golyó $\boldsymbol{S}$ sajátperdületével:

$$\boldsymbol{m} = \gamma \boldsymbol{S}.$$

Adjuk meg a γ tényező értékét Q és M segítségével! (20 p)

3.2. A forgó, töltött golyót homogén, $\boldsymbol{B} = (0, 0, B_0)$ indukciójú mágneses térbe helyezzük úgy, hogy kezdetben mágneses momentuma

$$\boldsymbol{m}(0) = m_0(\sin\varphi, 0, \cos\varphi)$$

legyen, ahol φ a mágneses tér iránya és a mágneses momentum iránya által bezárt szög. Határozzuk meg a golyó mágneses momentumát a mágneses térbe helyezést követően t idő múlva, azaz az

$$\boldsymbol{m}(t) = \big(m_x(t), m_y(t), m_z(t)\big)$$

mennyiséget! A választ γ, B_0, m_0 és φ felhasználásával adjuk meg! (30 p)

Útmutatás: Homogén, $\boldsymbol{B}$ indukciójú mágneses térbe helyezett $\boldsymbol{m}$ mágneses momentumra $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$ forgatónyomaték hat.

3.3. A μ^+-részecske mágneses térbeli viselkedése úgy írható le, mintha egy klasszikus, töltött, forgó golyó lenne $\boldsymbol{S}$ sajátperdülettel és $\boldsymbol{m}$ mágneses momentummal. A müon mágneses momentuma is arányos a sajátperdületével (spinjével): $\boldsymbol{m} = \gamma_\mu \boldsymbol{S}$, az arányossági tényező azonban $\gamma_\mu = 8{,}48 \cdot 10^8$ Hz/T, a müon ún. giromágneses faktora. (A müon esetében γ_μ nem számolható olyan egyszerűen, mint a **3.1.** alfeladatban.)

Határozzuk meg a müon mágneses momentumának kezdeti ($t = 0$) iránya és a mágneses momentum t. időpillanatbeli iránya által bezárt $\alpha(t)$ szöget! A lokális mágneses tér az intersticiális helyen $\boldsymbol{B} = (0, 0, B_0)$, a müon kezdeti mágneses momentuma pedig $\boldsymbol{m}(t = 0) = m_0(\sin\varphi, 0, \cos\varphi)$. A választ γ_μ, B_0, m_0 és φ segítségével adjuk meg! (20 p)

3.4. Az intersticiális helyen lévő müon a kristályba juttatása után előbb-utóbb pozitronra (e^+), elektron-neutrínóra (ν_e) és müon-antineutrínóra ($\overline{\nu}_\mu$) bomlik:

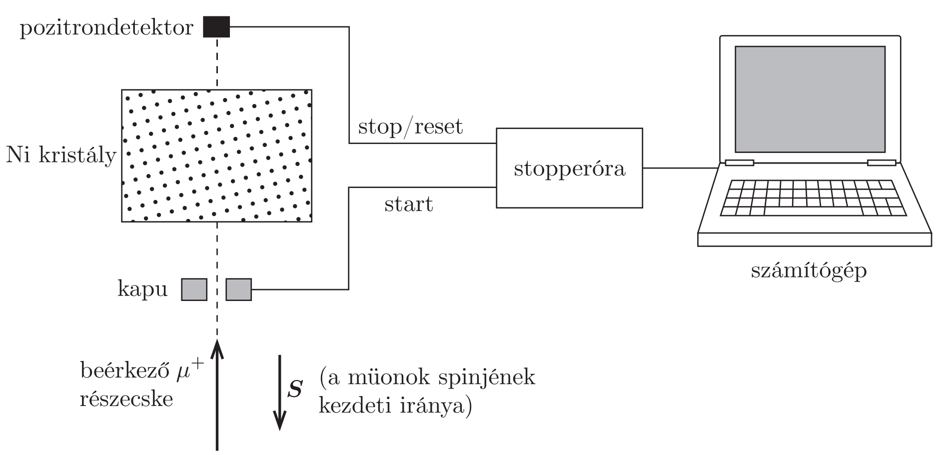
$$\mu^+ \longrightarrow e^+ + \nu_\mathrm{e} + \overline{\nu}_\mu.$$

A pozitron kibocsátási irányának valószínűségeloszlása nem gömbszimmetrikus: legnagyobb eséllyel a müon pillanatnyi spinjével megegyező irányban repül ki a pozitron, míg a legkisebb valószínűsége a spin irányával ellentétes irányban történő kibocsátásnak van. Annak valószínűsége, hogy a pozitron kibocsátási iránya a müon spinjével ϑ szöget bezáró irányban elhelyezkedő kicsiny $\delta\Omega$ térszögbe essen

$$P(\vartheta, \delta\Omega) = w\left(1 + \frac{1}{3}\cos\vartheta\right)\delta\Omega,$$

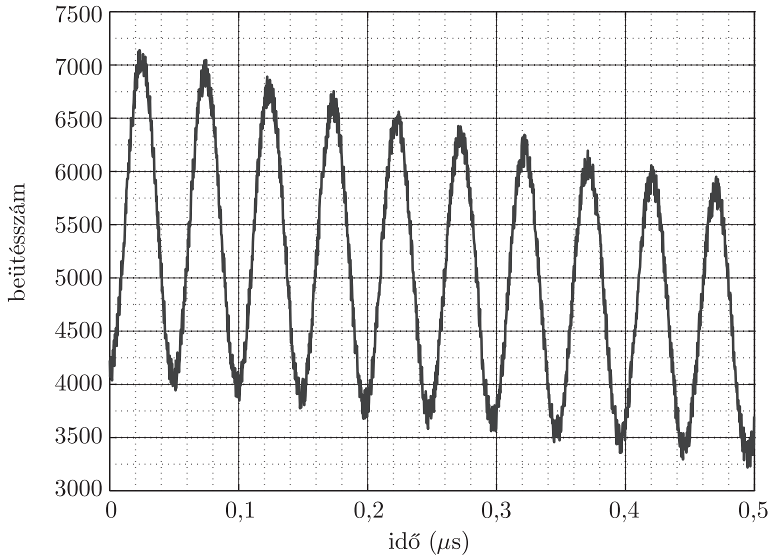
ahol w egy dimenziótlan paraméter. Határozzuk meg w értékét! (20 p)

3.5. A *2. ábrán* egy valódi μSR-kísérlet vázlatos rajza látható. Amikor a rögzített irányból beérkező müon áthalad a kapun, a stopperóra elindul, a müon pedig beépül a kristályrács egy intersticiális helyére. Egy idő után a beépült müon elbomlik, a keletkező pozitron pedig kicsiny (de nem zérus) eséllyel eltalálja az ábrán látható detektort. Ekkor a stopperóra megáll és lenullázódik, a mért időtartam eltárolódik a számítógépen, és egy újabb müont lőnek be a kristályba. (Azokat az eseményeket, amelyekben a müon mégsem épül be a kristályrácsba, vagy a keletkező pozitron nem találja el a detektort, egy –az ábrán nem jelölt– speciális áramkör segítségével automatikusan kiszűrik.)



2. ábra

A beérkező müonok (az előállítási módjukból adódóan) tökéletesen polarizáltak, azaz spinjük minden esetben ellentétes irányú a belövés irányával. Ez azt jelenti, hogy a kristályrácsba történő beépülés (vagyis a stopper indulásának) pillanatában a müonok spinje mindig ugyanolyan irányú.



3. ábra

Több millió müon belövése után a számítógép összegyűjti a beérkezett időtartamokat, és hisztogramot készít belőlük (*3. ábra*). A hisztogram úgy készül, hogy a $t = 0$ és a leghosszabb mért időtartam közötti időablakot kicsiny, egyenlő (mondjuk 1 ns) hosszúságú intervallumokra osztjuk, majd megszámoljuk, hogy hány darab müon bomlott el a betáplálást követően az adott (például a 100 ns és 101 ns közötti) időintervallumban. A hisztogram tehát a kísérleti berendezés által mért elbomlási időtartamok előfordulási gyakoriságát mutatja.

A *3. ábrán* látható hisztogram segítségével határozzuk meg a nikkel kristály intersticiális helyein észlelhető B_0 lokális mágneses indukció nagyságát tesla egységekben! (20 p)

3.6. A *3. ábra* segítségével határozzuk meg a müonok T_μ felezési idejét! (20 p)

3.7. A mérési adatok alapján adjunk becslést a lokális mágneses tér iránya és a beérkező müonok spinjének iránya közötti φ szög nagyságára! Lehet-e ez kétféle érték? (20 p)

Fizikai állandók táblázata

vákuumbeli fénysebesség:	$c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s;
a vákuum permeabilitása:	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am;
gravitációs állandó:	$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^3/(kg s^2);
proton tömege:	$m_p = 938{,}3$ MeV/c^2;
neutron tömege:	$m_n = 939{,}6$ MeV/c^2;
pion tömege:	$m_\pi = 139{,}6$ MeV/c^2;
Föld átlagos sugara:	$R_{\text{Föld}} = 6{,}371 \cdot 10^6$ m;
Föld tömege:	$m_{\text{Föld}} = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg;
Föld tehetetlenségi nyomatéka:	$\Theta_{\text{Föld}} = 8{,}04 \cdot 10^{37}$ kgm^2;
Hold sugara:	$R_{\text{Hold}} = 1{,}737 \cdot 10^6$ m;
Hold tömege:	$m_{\text{Hold}} = 7{,}348 \cdot 10^{22}$ kg;
átlagos Föld–Hold távolság:	$L = 3{,}844 \cdot 10^8$ m;
a Hold keringési ideje:	$T_{\text{Hold}} = 27{,}32$ nap;
a müon giromágneses faktora:	$\gamma_\mu = 8{,}48 \cdot 10^8$ Hz/T.