

Matematika és fizika totó megoldása¹

A telitalálatos szelvény:

2, X, 2, X, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, X, X, 2.

Az alábbiakban rövid útmutatást adunk a feladatok megoldásához.

1. Húzzuk először (nem feltétlenül egyforma nagy erővel) a mászórudat és a kötelet úgy, hogy az aljuk ugyanolyan magasra emelkedjék. Mivel ilyenkor a mászórúd tömegközéppontja biztosan távolabb van a felfüggesztési ponton átmenő függőlegestől, mint a kötélé, a mászókötel ilyen helyzetben tartásához kisebb erő szükséges, mint a rúdnál alkalmazott erő. Ha ezután a kötéltre kifejtett erőt megnöveljük annyira, hogy a rudat húzó erővel egyforma nagy legyen, a kötél vége magasabbra emelkedik, mint a rúd alja. **2.** Hívjuk a hangya két irányváltogatás között megtett útját „lépés”-nek. Így azt kell megmutatnunk, hogy amennyiben a hangya visszaért kiindulási pontjába, akkor lépéseinek száma osztható 4-gyel.

Világos, hogy a hangya visszatéréseig ugyanannyiszor lépett balra, mint jobbra, összesen tehát páros sokat lépett vízszintesen. Ugyanez igaz a függőleges irányú lépéseire is.

Ha a hangya kezdő lépésének irányával párhuzamosan érkezett volna vissza, akkor a lépésenkénti irányváltogatás miatt eggyel kevesebbszer lépett volna erre az irányra merőlegesen, mint vele párhuzamosan, így vagy a vízszintes, vagy pedig a függőleges lépéseinek a száma páratlan volna. Láttuk viszont, hogy e két szám páros, hangyánk tehát csak az indulási irányra merőlegesen fejezhette be útját. Ebből következik, hogy ugyanannyit lépett vízszintesen, mint függőlegesen. Lépéseinek a száma tehát egy páros szám kétszerese, így valóban osztható 4-gyel.

A megadott válaszok közül csak a 100 olyan többszöröse az 5-nek, melyben a szorzó osztható 4-gyel.

3. Megmutatjuk, hogy három instabil oldallapú homogén tetraéder nincsen. (Kevesebb instabil oldallappal rendelkező viszont nyilvánvalóan létezik. Például egy „erősen tompaszögű” háromszög alapú, „nagyon ferde” gúla két lapjáról is felborul.)

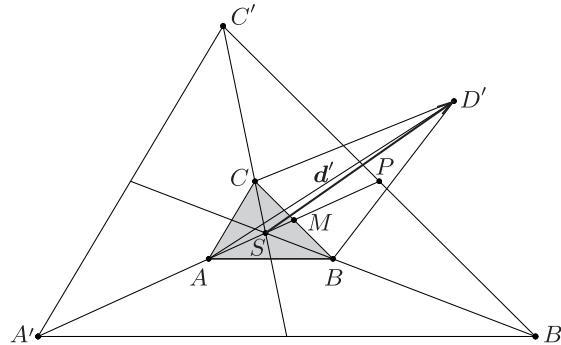
Ha a tetraédernek valamelyik lapja instabil, akkor átbillenéskor a súlypontja alacsonyabbra kerül. Egy tetraéder súlypontjának magassága a tetraéder magasságának negyedénél található, így minél nagyobb területű lapján fekszik a tetraéder, a súlypont annál alacsonyabban helyezkedik el. Belátjuk: ha valamelyik oldallap instabil, akkor létezik a tetraédernek legalább két másik oldallapja, amelyek területe nagyobb, mint a kérdéses lap területe. Ebből már következik, hogy a legnagyobb és a második legnagyobb területű oldallap stabil kell legyen.

Egy homogén tetraéder súlypontjának s helyvektorát az

$$s = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$$

módon számíthatjuk ki a tetraéder csúcsaiba mutató a , b , c és d vektorok segítségével. A tetraédernek az ABC lapja akkor instabil, ha a tetraéder súlypontjának s helyvektorának az ABC síkra eső s' vetülete az ABC háromszögön kívülre esik.

Tegyük fel, hogy a tetraéder ABC lapja instabil, és legyen az origó az ABC háromszög S súlypontja! Ekkor $a + b + c = 0$, így $s = d/4$. Nagyítsuk fel az ABC háromszöget az S súlypontjából centrálisan a négyszeresére! Az ABC oldallap borulékonyasága miatt a d vektor ABC síkra vett d' vetületének végpontja kívül esik a felnagyított $A'B'C'$ háromszögön.



1. ábra

Könnyen belátható, hogy $AM = MP$, ezért a BC és $B'C'$ egyenesek távolsága ugyanakkora, mint az A csúcs és a BC egyenes távolsága. Ugyanez igaz a többi oldalra is. Ebből következik, hogy a D csúcs D' vetülete kívül esik az $A'B'C'$ háromszögön, tehát egyik oldalélének – mondjuk $B'C'$ -nek – az ABC háromszöggel ellentétes oldalára kerül.

¹ A kérdések a 45. oldalon találhatók.

Megmutatjuk, hogy ehhez a tetraédernek legalább két oldallapja nagyobb területű, mint az alaplap $t(ABC)$ területe. $t(BCD') > t(ABC)$, hiszen D' messzebb van BC -től, mint az A pont. Másrészt $t(BCD) > t(BCD')$, mert a BCD' háromszöget a BCD -ből vetítéssel állítottuk elő. Tehát a BCD háromszög területe nagyobb, mint az ABC háromszög területe. Az *ábrából* leolvashatóan az is fennáll, hogy

$$t(ABD') + t(ACD') \geq t(ABC) + t(BCD') > 2 \cdot t(ABC),$$

tehát az ABD' és ACD' háromszögek valamelyike is biztosan nagyobb területű, mint az alaplap, a hozzá tartozó tetraéderlap pedig (a vetítés miatt) még nagyobb. Találtunk tehát két olyan oldallapot (BCD , valamint ABD és ACD közül az egyik), amelynek területe nagyobb, mint az instabil ABC oldallapé.

Ezzel beláttuk, hogy egy homogén tetraédernek legalább két stabil oldallapja kell legyen.

4. A keresett szám fele és harmada is egész, így az előbbi 3-mal osztható négyzetszám, utóbbi pedig 2-vel osztható köbszám. A szám fele így osztható $3^2 = 9$ -cel. Maga a szám emiatt $2 \cdot 9 = 18$ -cal és $3 \cdot 8 = 24$ -gyel, vagyis a 18 és a 24 legkisebb közös többszörösével, 72-vel is osztható.

A 72 fele 36, ami négyzetszám, ezért a keresett szám a 72-nek négyzetszám-szorosa. Azt a legkisebb négyzetszámot kell tehát még megkeresnünk, amellyel $72 : 3 = 24$ -et megszorozva köbszámot kapunk. Mivel $24 = 2^3 \cdot 3$, minden alkalmas szorzó osztható $3^2 = 9$ -cel, e szorzók legkisebbike pedig a 9.

A keresett szám tehát a $9 \cdot 72 = 648$. Ennek a fele 324, ami 18-nak a négyzete, harmada pedig 216, ami 6-nak a köbe.

Megjegyzés. A megoldás során többször is felhasználtuk azt az egyáltalán nem nyilvánvaló tényt, hogy egy szám négyzetében és köbében ugyanazok a prímtényezők szerepelnek, mint a számban, illetve hogy előbbiben minden egyes prímtényező kitevője páros, utóbbiban pedig minden kitevő osztható 3-mal.

A fentiek a „számmelélet alaptételének” nevezett állítás következményei, mely szerint pozitív egész számok csak egyféleképpen bonthatók fel prímszámok szorzatára.

5. A kihülés „időállandója” a test méretétől (R), sűrűségétől (ρ), fajhőjétől (c) és a környezet hővezetőképességétől (σ) függ(het). (Feltételezzük, hogy maga a test a környezeténél sokkal jobb hővezető, pl. fém, emiatt a test hővezetőképességét nem soroltuk fel a lényeges paraméterek között.) Ezen adatokból idő dimenziójú mennyiség $T \propto \rho c R^2 / \sigma$ módon képezhető, ami azt mutatja, hogy a kihülés „ideje” erősen függ a test méretétől. Különböző alakú, de azonos „átlagos” méretű testek – mint azt egyszerű geometriájú konkrét példákön láthatjuk – általában más-más ütemben hűlnek. A hőmérsékletkülönbség „feleződési ideje” tehát általában a test méretétől is és az alakjától is függ.

6. Számozzuk meg a perselyeket, illetve a hozzájuk illő kulcsokat 1-től 10-ig, ezután helyezzük el a kulcsokat a zárt perselyekben, majd állítsuk sorba a perselyeket. A feltétel szerint ekkor a 10 kulcsnak 10!-féle egyenlően valószínű sorrendje lehetséges. Minden egyes sorrendnek a kulcsok egy részének a kihúzási sorrendje felel meg, nekünk azoknak a sorrendeknek a számára van szükségünk, amikor valamennyi perselyt fel tudjuk nyitni, tehát az összes kulcsot kihúztuk.

Egy adott elhelyezés esetén pontosan akkor akadunk el, ha már nyitva van az a persely, amelynek a kulcsa éppen a kezünkbe került. Maga a kulcs ekkor csak az 1-es számú, feltört persely kulcsa lehet, hiszen erőszakoskodás nélkül felnyitott persely kulcsa nem lehet későbbi perselyben. Amennyiben tehát valamennyi perselyt fel tudjuk nyitni, akkor harmincadiknak az 1-es számú, feltört persely kulcsát húzzuk ki. Hívjuk a kulcsok ilyen sorrendjeit a perselyekben jó sorrendnek.

Mármint a kulcsok minden lehetséges $S = (s_1, s_2, \dots, s_{10})$ kihúzási sorrendjének – ahol tehát $s_{10} = 1$ – megfeleltethető a kulcsoknak egy olyan $S^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_{10}^*)$ jó sorrendje a perselyekben, melynek során éppen az S sorrendben férünk hozzá a kulcsokhoz. Nyilván

$$s_1^* = s_1, \quad s_{s_1}^* = s_2, \quad s_{s_2}^* = s_3, \quad \dots, \quad s_{s_8}^* = s_9, \quad s_{s_9}^* = s_{10} = 1.$$

Az $S \leftrightarrow S^*$ megfeleltetés jól láthatóan kölcsönösen egyértelműen képezi le az 1-gyel végződő permutációk halmazát a jó sorrendek halmazára, így éppen annyi jó sorrend van, mint ahányféleképpen sorba rakhatjuk a 10 darab kulcsot úgy, hogy az 1-es számú álljon az utolsó helyen. Mivel pedig az ilyen sorrendek száma éppen $9!$, a keresett valószínűség $\frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}$.

7. A hőmérséklet növekedtével a hajszálrugó hossza is és a billegőkerék átmérője is megnő. Emiatt a rugó direkciónyomatéka (egységnyi szögelforduláshoz szükséges forgatónyomaték) lecsökken, a billegőkerék tehetetlenségi nyomatéka pedig megnő. Mindkét változás növeli a torziós lengések periódusidejét, emiatt az óra (hacsak valamilyen trükkös mechanizmussal ki nem egyenlítik ezt a hatást) *késni* fog.

8. Megmutatjuk, hogy a feltétel éppen a derékszögű háromszögekre teljesül. Eközben felhasználjuk a következő két, nyilvánvaló állítást:

(*) *A magasságszakasz felezőpontja rajta van a magasságra merőleges középvonal egyenesén.*

(**) *Ha egy egyenes nem megy át egy adott háromszög egyik csúcsán sem, akkor a háromszög oldalai közül páros sokat metsz belső pontban, tehát vagy kettőt, vagy pedig egyet sem.*

A megoldásra térve legyen először az ABC háromszög A csúcsánál derékszög. Ekkor az AB és az AC befogók egyúttal magasságok is. A felezőpontjukat összekötő egyenes éppen a BC oldallal párhuzamos középvonal, ezen pedig

a (*) állítás miatt rajta van az A csúcsból induló magasságszakasz felezőpontja is. Derékszögű háromszög magasságszakaszainak felezőpontjai tehát valóban egy egyenesen vannak.

Most belátjuk, hogy hegyes- vagy tompaszögű háromszögre a feltétel nem teljesül.

Ha a háromszög hegyesszögű, akkor mindhárom magasságszakasz a háromszög belsejében van, így a három felezőpont a középvonalháromszög egy-egy oldalának belső pontja. Ha ezek egy egyenesen volnának, akkor ez az egyenes a középvonalháromszögnek három oldalát metszené belső pontban, ami (**) miatt lehetetlen.

Ha a háromszög tompaszögű, akkor két magasságszakasz a háromszögön kívül, egy pedig azon belül halad. A három felezőpont közül ezért kettő a középvonalháromszög egy-egy oldalegyenesén, de az oldalszakaszon kívül, egy pedig a harmadik oldalszakaszon belül található. Ha tehát a három felezőpont egy egyenesen volna, akkor ez az egyenes a középvonalháromszögnek pontosan egy oldalát metszené belső pontban, ami (**) miatt ismét nem lehet.

Ezzel állításunkat beláttuk.

9. Azt kell megvizsgálnunk, hogy mekkora munkát végzünk, miközben a fonál hosszát valamekkora h távolsággal lecsökkentjük. Ha ez a munka mgh -val, vagyis az ingatest helyzeti energia-növekedésével lenne egyenlő, akkor a lengés amplitúdója nem változna.

Ténylegesen a végzett munka nagyobb, mint mgh , emiatt a lengések amplitúdója *nőni fog*. Igaz ugyan, hogy az mg nehézségi erőnek csak $mg \cos \varphi \leq mg$ komponense járul hozzá a fonálerőhöz, viszont a centripetális gyorsuláshoz szükséges mv^2/ℓ „többleterőt” is a fonálnak kell fedeznie. (Itt $\varphi(t) = \varphi_{\max} \sin \omega t$ az inga kitérése, $v(t) = \varphi_{\max} \ell \omega \cos \omega t$ a lengő test pillanatnyi sebessége, $\omega = \sqrt{g/\ell}$ pedig az aktuális ingahosszhoz tartozó körfrekvencia.) A fonalat feszítő erő (kis szögkitérések esetén)

$$K(t) = mg \cos \varphi + \frac{mv^2}{\ell} \approx mg \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) + \frac{mv^2}{\ell} = mg + mg \varphi_{\max}^2 \left(-\frac{\cos^2 \omega t}{2} + \sin^2 \omega t \right).$$

Az utolsó tagban szereplő zárójeles kifejezés (felülvonással jelölt) időbeli átlaga pozitív, hiszen $\overline{\sin^2 \varphi} = \overline{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{2}$, így valóban $\overline{K(t)} > mg$, vagyis a lengések szögamplitúdója növekszik.

10. Ha köbre emeljük az eredeti egyenlet mindkét oldalát és a bal oldalt az

$$(1) \quad (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

azonosság szerint alakítjuk át, akkor rendezés után a

$$(2) \quad 3\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{4-x}(\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{4-x}) = -(x+8)$$

egyenlethez jutunk. Itt (1) alapján a bal oldali zárójelben $-\sqrt[3]{3}$ áll, és így

$$(3) \quad 3\sqrt[3]{3(2x+1)(4-x)} = x+8.$$

Ismét köbre emelve és rendezve a harmadfokú

$$(4) \quad x^3 + 186x^2 - 375x + 188 = 0$$

egyenletet kapjuk. A bal oldalon az együtthatók összege nulla, az egyenletnek tehát gyöke az 1, így az $(x-1)$ tényező kiemelése után a kapott másodfokú polinomot szorzattá alakítva végül az

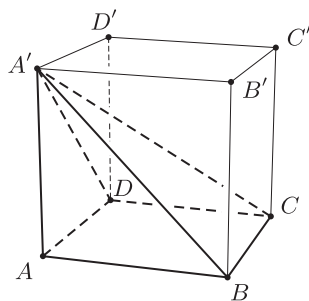
$$(5) \quad (x-1)^2(x+188) = 0$$

egyenlet adódik. Ennek két gyöke van, az 1 és a -188 . Az eredeti egyenletnek az 1 nem megoldása, hiszen ha $x = 1$, akkor a bal oldal pozitív, a jobb oldal pedig negatív. A (-188) megoldása az (1) egyenletnek.

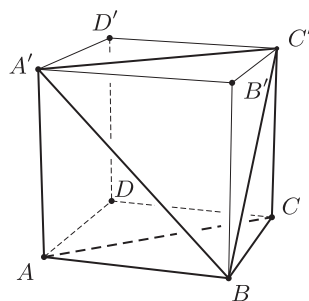
11. A víz felszíne az új egyensúlyi helyzetben a Föld és az égi jövevény együttes potenciális energiájának szintfelülete kell legyen. A Föld gravitációs potenciálja közelítőleg „vízszintes síkok” mentén állandó, pontosabb számolásnál a síkokat fűldsugárnyi sugarú gömbökkel kell helyettesíteni). A pontszerűnek tekinthető „sötét anyagdarabka” gravitációs potenciálja is gömbfelületek mentén állandó, de ezen gömbök sugara sokkal kisebb, mint a Föld sugara. (Feltételezzük, hogy az égi jövevény megállt a tenger fenekén.) Az eredő gravitációs tér ekvipotenciális felületei a kérdéses helyen „kidudorodó” felületek, a víz felszíne tehát a korábbi szinthez képest *megemelkedik!*

12. Legyen a kocka két szemközti lapja $ABCD$ és $A'B'C'D'$, a kocka élhosszát pedig válasszuk egységnek. A test öt csúcsa közül legalább három a kockának ugyanazon a lapján helyezkedik el. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ez a három csúcs az A , B és a C . A másik két csúcs elhelyezkedésétől függően több esetet kell megkülönböztetnünk.

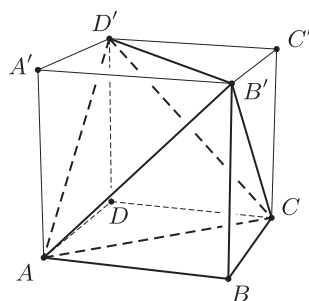
Ha D is csúcsa a testnek, akkor A' , B' , C' vagy D' bármelyikét választjuk ötödiknek, egy négyzet alapú gúlát kapunk (1. ábra), melynek magassága a kocka élével egyenlő, tehát a térfogata $\frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{3}$, a kocka térfogatának harmada.



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Ha D nincs a kiválasztott csúcsok közt, akkor A' , B' , C' , D' közül kettőt választottunk. Ha D' nincs köztük, akkor vagy van olyan lap, amelynek mind a négy csúcsát kiválasztottuk, és így az előbb kapott négyzet alapú gúlához jutunk vagy az A' , C' csúcsokat választottuk (2. ábra). Ez a test egybevágó azzal a két másikkal, amelynek A' és D' , illetve C' és D' a fedőlapon lévő csúcsai. Vizsgáljuk például az $ABC'A'C'$ testet (2. ábra). Az A , C , C' , A' pontok egy síkban vannak, egy téglalap négy csúcsát alkotják, maga a test téglalap alapú gúla. Az ötödik csúcs távolsága az alaplaptól a kocka lapátlójának a felével egyenlő, ezért a gúla térfogata:

$$\frac{1}{3} \left(\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{3},$$

vagyis szintén a kocka térfogatának harmada.

Egy esetet kell még megvizsgálnunk, amikor A , B , C , D' és B' (3. ábra) a kiválasztott csúcsok. Ekkor a test két, az ACB' háromszöglap mentén összeillesztett tetraéderből áll. A BD' egyenes merőleges az ACB' háromszög síkjára, tehát a két tetraéder ACB' lapjához tartozó magasságának összege éppen $BD' = \sqrt{3}$, a kocka testátlója. Az ACB' háromszög mindhárom oldala lapátló, tehát területe $(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. A két tetraéder együttes térfogata így $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, azaz a kocka térfogatának fele.

Az öt csúcs által meghatározott test térfogata tehát a kocka térfogatának a fele vagy a harmada.

13. A II. Kepler-törvény érvényessége arra utal, hogy Furcsavilágban is centrális a Nap erőtere. A Nap (vonzócentrum) akkor lehet bolygók ellipszispályájának középpontjában, ha a bolygók mozgása két (eltérő amplitúdójú és különböző fázisú) harmonikus rezgőmozgásból tehető össze (szuperponálható). Az ilyen mozgás dinamikai feltétele: a vonzóerő nagysága egyenesen arányos a vonzócentrumtól mért távolsággal. Mivel a harmonikus rezgőmozgás periódusideje *nem* függ a rezgés amplitúdójától (az ellipszis méreteitől), a kérdéses hatványkitevő: $n = 0$.

13+1. Legyen a feltételnek megfelelő módon megadott intervallumok jobb végpontjainak legkisebbike J_1 ; hagyjuk el az intervallumok közül mindazokat – a feltétel szerint legfeljebb hármat –, amelyek J_1 -et tartalmazzák. A megmaradó

intervallumok egyike sem tartalmazza J_1 -et, rájuk a fenti eljárást megismételve a J_2 végpontot kapjuk, és ismét legfeljebb három újabb intervallumot hagyhatunk el. További intervallumunk viszont már egyáltalán nem maradhat, hiszen egy ilyennek sem a J_1 , sem pedig a J_2 végpontjával nem lehet közös pontja, e kettőnek pedig egymással szintén nincsen.

Azt kaptuk, hogy legfeljebb 6 intervallum adható meg az előírt módon. Ez viszont lehetséges is, ha közülük hármat-hármat „egymásba skatulyázunk”.

Megjegyzés. A megoldás során lényegében azt láttuk be, hogy ha intervallumok egy rendszerében bármely három között van két metsző, akkor létezik legfeljebb két pont – ezek voltak J_1 és J_2 – amelyek valamennyi intervallumot „lefogják”, azaz mindegyik intervallum tartalmaz a pontok közül legalább egyet.

Ez általában is igaz. Intervallumok bármely rendszerében az intervallumrendszert lefogó pontok számának a minimuma egyenlő a páronként közös pontok nélkül megadható intervallumok számának a maximumával. Ennél kevesebb pont nyilván nem elegendő valamennyi intervallum lefogásához, hiszen diszjunkt intervallumok lefogásához különböző pontokra van szükség. Az pedig, hogy ennyi ponttal megvalósítható valamennyi intervallum lefogása, éppen a megoldás gondolatmenetével igazolható, hiszen a kiválasztott $J_1, J_2, \dots, J_k$ végpontok egy diszjunkt intervallumrendszer végpontjai.