

Ismeretes, hogy két párhuzamosan kapcsolt, L_1 illetve L_2 induktivitású tekercs eredő induktivitása

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}.$$

Ez az összefüggés azonban csak akkor érvényes, ha a tekercsek közötti kölcsönös indukció elhanyagolható. Vajon mekkora lesz az eredő induktivitás, ha a kölcsönös indukció is lényeges szerepet játszik? Ez a cikk erre keresi a választ. Először bevezetésként összefoglaljuk a kölcsönös indukcióra és az önindukcióra vonatkozó tudnivalókat.

A kölcsönös indukció és az önindukció

Tekintsünk két tekercset, amelyek közül az egyiket váltóáramú áramforrásra kapcsoljuk, a másikat pedig egy voltmérőhöz kötjük. Az áramforrásra kapcsolt körben időben változik az áram erőssége, emiatt változik a tekercs Φ_1 fluxusa. Ezt a fluxusváltozást a másik tekercs „érzi”, ezért ebben a tekercsben feszültség indukálódik a Faraday-féle indukciós törvénynek megfelelően.

Ezt a jelenséget nevezzük *kölcsönös indukciónak*. Ha az első körben az áram változási üteme $\frac{\Delta i_1}{\Delta t}$, akkor a másik körben indukálódó feszültség

$$(1) \quad U_2 = -M_{21} \frac{\Delta i_1}{\Delta t},$$

ahol M_{21} a második tekercsnek az elsőre vonatkoztatott *kölcsönös* indukciós együtthatója. Ez a mennyiség megmutatja, hogy az első körben történt $\Delta \Phi_1$ fluxusváltozás milyen erős hatást gyakorol a másik körben, azaz az első kör indukcióvonalai közül mennyi jut el a másik áramkörhöz.

A kölcsönös indukciós együttható konkrét alakját a legtöbb esetben nehéz meghatározni, de nekünk erre most nincs is szükségünk. Annyit érdemes tudni, hogy ez a mennyiség függ a tekercsek méreteitől (hossz, menetszám, keresztmetszet), a tekercsekben levő közeg anyagi minőségétől és a tekercsek egymástól való távolságától. Távolság elhelyezkedő tekercsek esetén kevesebb számú indukcióvonal éri el a másik áramkört, kisebb lesz a benne indukált feszültség, kisebb lesz a kölcsönös indukciós együttható. Ekkor azt mondjuk, hogy a két tekercs közötti mágneses (induktív) csatolás *gyenge*. Ha nagyon közel vannak egymáshoz a tekercsek, viszonylag sok indukcióvonal megy át a másik tekercs keresztmetszetén, ilyenkor a csatolás *erős*, M_{21} értéke nagy.

Ha ezek után fordított szereposztást adunk, azaz a két áramkörben felcseréljük az áramforrást és a voltmérőt, akkor az első körben mért indukált feszültség az előzőek alapján

$$(2) \quad U_1 = -M_{12} \frac{\Delta i_2}{\Delta t}$$

lesz. Ebben a kifejezésben $\frac{\Delta i_2}{\Delta t}$ a második áramkör áramának változási üteme, M_{12} pedig az első tekercs másodikra vonatkoztatott kölcsönös indukciós együtthatója. Mi a kapcsolat a két együttható között? Itt nem részletezett energetikai megfontolással megmutatható (lásd [1], [2] vagy [3]), hogy a két együttható megegyezik:

$$(3) \quad M_{12} = M_{21} = M.$$

Ha csak egy tekercset vizsgálunk, a saját körében is feszültség indukálódik a fluxusváltozás miatt. Ezt nevezzük *önindukciónak*. Az indukált feszültség így számítható:

$$(4) \quad U = -L \frac{\Delta i}{\Delta t},$$

ahol L a tekercs önindukciós együtthatója (más néven induktivitása).

Az (1), (2), (4) összefüggésekben szereplő negatív előjel a Lenz-törvényre utal, azaz az indukált áram (feszültség) iránya olyan, hogy mágneses hatásával akadályozza az őt létrehozó változást (a fluxusváltozást).

Ha mindkét áramkört áramforrásra kapcsoljuk, a rendszerben egyidejűleg fellép az önindukció és a kölcsönös indukció. Belátható, hogy ha az 1-es tekercsben I_1 , a 2-es tekercsben pedig I_2 áram folyik, akkor az egész rendszer mágneses energiája:

$$(5) \quad W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2.$$

Megjegyzés. Gondoljuk el, hogy az 1-es tekercs áramát valamekkora i_1 értékről egy kicsiny Δt idő alatt $i_1 + \Delta i_1$ -re, a 2-es tekercsét i_2 -ről $i_2 + \Delta i_2$ -re változtatjuk. Eközben a tekercsekben feszültség indukálódik (ennek nagysága ideális, ohmos ellenállás nélküli esetben a tekercsekre kapcsolt pillanatnyi feszültséggel egyezik meg), tehát a $P = U i$ összefüggésnek megfelelően $\Delta W = \sum P \Delta t$ nagyságú munkát kell végeznünk. Ez a munka, ami az egész rendszer mágneses energiáját növeli, az önindukciós és kölcsönös indukciós együtthatók segítségével így számítható:

$$\begin{aligned} \Delta W &= i_1 \left(L_1 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} + M \frac{\Delta i_2}{\Delta t} \right) \Delta t + i_2 \left(L_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t} + M \frac{\Delta i_1}{\Delta t} \right) \Delta t = \\ &= L_1 \cdot i_1 \Delta i_1 + L_2 \cdot i_2 \Delta i_2 + M \cdot (i_1 \Delta i_2 + i_2 \Delta i_1) = \Delta \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right). \end{aligned}$$

A kicsiny munkavégzéseket összeadva – miközben az áramok 0-ról I_1 -re, illetve I_2 -re nőnek – megkapjuk az áramjárta tekercsek teljes mágneses energiájának (5) képletét.

A mágneses energia nyilván pozitív mennyiség, hiszen (a Lenz-törvény értelmében) $W > 0$ munka szükséges a létrehozásához. Innen az $I_2 = 0$ speciális esetet választva $L_1 > 0$, a fordított szereposztású esetből pedig $L_2 > 0$ következik. Csatolásmentes esetben

(tehát amikor a tekercsek egymástól messze vannak, és emiatt $M = 0$) a két tekercs energiája $\frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2$.

A csatolásmentes áramkör energiájához képest a csatolással rendelkező kör energiája lehet nagyobb vagy kisebb. A csatolást leíró MI_1I_2 tag ugyanis lehet pozitív, ha a két áramkör mágneses mezői erősítik egymást (ellentétes irányú az egymás melletti tekercsek tekercselés), de lehet negatív is, ha a két kör mágneses mezői gyengítik egymást (egyirányú tekercselés). Ezek szerint M lehet pozitív és negatív is attól függően, hogy milyen irányban vannak csévélve a tekercsek. A továbbiakban különválasztjuk a két esetet; M -et mindig pozitívnak fogjuk tekinteni, és a tekercselés irányát megfelelő előjelek kiírásával vesszük figyelembe.

Az áramkör teljes energiáját kis átalakítással így is felírhatjuk:

$$W = \frac{1}{2}L_1 \left(I_1 + \frac{M}{L_1}I_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right) I_2^2 \geq 0.$$

Ennek a kifejezésnek pozitívnak kell lennie akkor is, ha

$$I_1 + \frac{M}{L_1}I_2 = 0.$$

Ekkor a második tagnak pozitívnak kell lenni, azaz fenn kell állnia az

$$M^2 \leq L_1L_2$$

egyenlőtlenségnek. Eszerint a két tekercs közötti kölcsönös indukciós együttható nem lehet akármekkora, csak a $0 \leq M \leq \sqrt{L_1L_2}$ határok közé eshet.

Emiatt szokás ezt az együtthatót az $M = k\sqrt{L_1L_2}$ alakban felírni; így a csatolás erősségét egy dimenziótlan $0 \leq k \leq 1$ számmal adhatjuk meg.

A párhuzamos kapcsolás

Térjünk most rá arra a kérdésre, hogy mekkora eredő inductivitást kaphatunk, ha párhuzamosan kapcsolunk két olyan tekercset, amelyek kölcsönös indukciója is számottevő. Tekintsünk egy konkrét példát:

1. feladat. Egy $L_1 = 45$ mH és egy $L_2 = 90$ mH inductivitású tekercset párhuzamosan kapcsolunk. Lehet-e az eredő inductivitás

- a) 10 mH;
- b) 30 mH;
- c) 50 mH?

Megoldás. Csatolásmentes ($k = 0$) esetben az eredő 30 mH, a b) válasz tehát lehetséges. Vajon a többi eset is megvalósulhat?

Legyen a tekercsek kölcsönös inductivitása M ! Az önindukcióból származó indukált feszültségek, ha az egyes ágakban i_1 és i_2 pillanatnyi erősségű áramok folynak:

$$U_1^{\text{önind.}} = -L_1 \frac{\Delta i_1}{\Delta t}, \quad U_2^{\text{önind.}} = -L_1 \frac{\Delta i_2}{\Delta t}.$$

Ha a tekercsek csévélése egymáshoz képest egyező, akkor a fenti indukált feszültségeket a kölcsönös indukció csökkenti (+), ha pedig ellentétes, akkor növeli (−). A tekercsekben indukált teljes feszültség – a párhuzamos kapcsolás miatt – ugyanakkora kell legyen:

$$(6) \quad U = -L_1 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} \pm M \frac{\Delta i_2}{\Delta t},$$

$$(7) \quad U = -L_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t} \pm M \frac{\Delta i_1}{\Delta t}.$$

Az indukált feszültséget az L eredő inductivitással felírva kapjuk, hogy

$$(8) \quad U = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} = -L \frac{\Delta(i_1 + i_2)}{\Delta t} = -L \left(\frac{\Delta i_1}{\Delta t} + \frac{\Delta i_2}{\Delta t} \right).$$

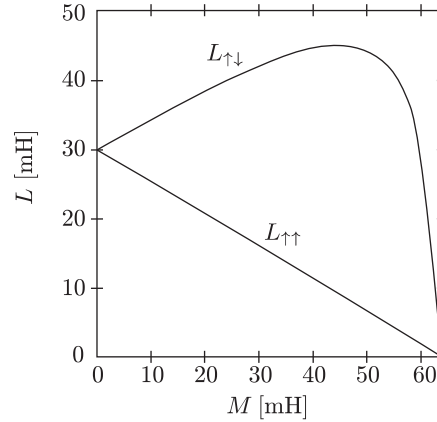
A (6) és (7) egyenletek felhasználásával kifejezhetjük a változási sebességeket, amelyeket (8)-ba behelyettesítve adódik az eredő inductivitás:

$$(9) \quad L_{\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \pm 2M}.$$

A $\uparrow\uparrow$ szimbólum az egyirányú tekercselést jelöli, ekkor a kifejezésben a pozitív (+), a $\uparrow\downarrow$ pedig az ellentétes irányú tekercselést jelenti, és ekkor a negatív (−) előjel írandó. Tudjuk, hogy M értéke két határ között változhat:

$$(10) \quad 0 \leq M \leq \sqrt{4050} \text{ mH} \approx 64 \text{ mH}.$$

Ábrázoljuk a (9) függvényeket, azaz az eredő L -et az M függvényében (lásd *ábra*)!



Két párhuzamosan kapcsolt tekercs eredő inductivitása a kölcsönös indukció mértékétől függően.
 $\uparrow\uparrow$ az egyirányú, $\uparrow\downarrow$ az ellentétes irányú tekercselést jelenti

Látható, hogy egyirányú tekercselésnél a kölcsönös indukció hatására a csatolásmentes esethez képest kisebb inductivitást kapunk. Ha a csatolás maximális ($k = 1$), akkor az eredő inductivitás eltűnik. Tehát ebben az esetben az eredő inductivitás 0 és 30 mH között változhat, és az a) válasznak megfelelő 10 mH-s értéket is felveheti.

Ellentétes irányú tekercselés esetén megmutatható, hogy az elérhető legnagyobb eredő inductivitás 45 mH. Vagyis ekkor az inductivitás 0 és 45 mH közötti érték lehet. Ezek szerint a c) válasz *nem* lehetséges.

Megjegyzés. A (9) összefüggés algebrai átalakításával beláthatjuk, hogy $L_{\uparrow\downarrow}$ egyik tekercs önindukciós együtthatójánál sem lehet nagyobb

$$L_{\uparrow\downarrow} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} = L_1 - \frac{(M - L_1)^2}{L_1 + L_2 - 2M}.$$

A kölcsönös indukcióra vonatkozó egyenlőtlenség és a számtani- és mértani közepek egyenlőtlensége miatt a fenti képlet utolsó tagjának nevezője nemnegatív, vagyis $L_{\uparrow\downarrow} \leq L_1$. Hasonlóan, a tekercsek felcserélésével kapjuk, hogy $L_{\uparrow\downarrow} \leq L_2$.

Észrevehetjük, hogy az ellentétes irányú csévélésnél van olyan eredő L , amelyhez két M tartozik. Vegyük pl. a 40 mH értéket. (9)-ből könnyen kiszámolhatjuk, hogy a két megoldás M -re 24 mH és 54 mH. A nagyobb inductivitást akkor kapjuk, ha a tekercseket közel helyezzük egymáshoz (erős a csatolás). Ha eltávolítjuk őket, akkor csökken M értéke, de a (9) összefüggés szerint újra ugyanakkora lehet az eredő inductivitás.

Megjegyzés.

A (9) kifejezés nevezője eltűnik az ellentétes irányú tekercselés esetében, ha $M_0 = \frac{L_1 + L_2}{2}$.

Mivel $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$ és $\sqrt{L_1 L_2} \leq \frac{L_1 + L_2}{2}$, azért $M \leq M_0$. Az $L_1 = L_2 = L$ eseten kívül M sohasem éri el M_0 értékét. Abban a határesetben, amikor $M = \sqrt{L_1 L_2}$ és $L_1 = L_2 = L$, akkor az eredő inductivitás L lesz, mert

$$\lim_{M \rightarrow L} \frac{L^2 - M^2}{2(L - M)} = \lim_{M \rightarrow L} \frac{(L - M)(L + M)}{2(L - M)} = \lim_{M \rightarrow L} \frac{L + M}{2} = L.$$

A fentiek ismeretében arra biztatjuk Olvasóinkat, hogy oldják meg a következő feladatot:

2. feladat. Egy $L_1 = 45$ mH és egy $L_2 = 90$ mH inductivitású tekercset sorosan kapcsolunk. Milyen határok közt eshet az eredő inductivitásuk, ha a kölcsönös indukció is számottevő?

Hivatkozások

- [1] Litz J.: *Elektromosságtan és mágnességtan*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1998).
- [2] Simonyi K.: *Elméleti villamosságtan*, Tankönyvkiadó, Budapest (1967); Műszaki Könyvkiadó, Budapest (2000).
- [3] Gnädig P.: A kölcsönös indukció, *KöMaL* (2001/2), 110–116.

Szász Krisztián PhD hallgató, MTA Szilárdtestfizikai és Optikai Kutatóintézet.