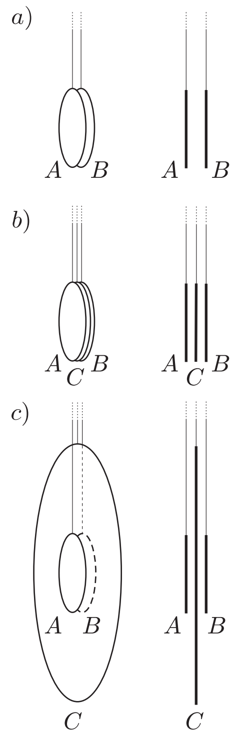
1. feladat. Töltött korongok. Két vékony, 5 cm sugarú fémkorongot szigetelő fonállal, egymással párhuzamosan felfüggesztünk (lásd *1.a) ábra*). A korongok egymáshoz közel (mondjuk 2 mm-re) vannak.

1. Számítsuk ki a korongok között ható erőt, ha kicsiny $+q$ és $-q$ töltéseket viszünk rájuk. Mivel q kicsi, a korongok elmozdulását és a kisülés lehetőségét nem kell figyelembe vennünk.

2. Ezután vizsgáljunk egyetlen korongot. Határozzuk meg a felületi töltéseloszlást egy R sugarú, $+q$ töltésű, magában álló fémkorongon (ez a töltéseloszlás hasznos lehet a következő kérdés megválaszolásához).

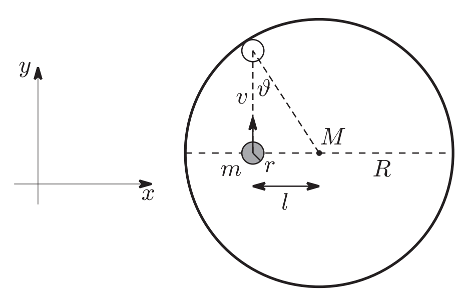
Ezután mindkét korongot $+q$ töltéssel látjuk el, majd egy harmadik, $R^* > 5$ cm sugarú, semleges fémkorongot helyezünk a kettő közé egy szigetelő fonálon. A három korong egymással párhuzamos, középpontjaik pedig ugyanazon a vízszintes egyenesen fekszenek (síkjukra merőlegesen nézve tehát koncentrikus köröknek tűnnek). Ezt az állapotot mutatja az *1.c) ábra.*

3. Mekkora a középső korong R^* sugara, ha a két szélső, töltött lemezre ható elektrosztatikus erő nulla? (Az élek hatását hanyagoljuk el a feladatban.)



1. ábra

2. feladat. Henger ütközés. Egy M tömegű, R sugarú üreges henger nyugszik a vízszintes síkon. A henger belsejében egy m tömegű, r sugarú tömör korong található. Kezdetben a korong középpontja l távolságra van a henger középpontjától, és y-irányban mozog v sebességgel a *2. ábrán* látható módon. Ha mást nem kötünk ki, minden ütközés rugalmas, és a súrlódás mindig elhanyagolható.



2. ábra

1. Határozzuk meg a korong és a henger sebességének x- és y-komponenseit közvetlenül az első ütközés után. A választ m, M, v és ϑ függvényében adjuk meg.

[1] A versenyről részletes információ található a KöMaL honlapján (lásd Aktuális/WoPhO).
A feladatokat angolból fordította: Szabó Attila.
A megoldások beküldési határideje: **2011. június 30.**

2. Határozzuk meg a korong és a henger sebességének x- és y-komponenseit közvetlenül a második ütközés után. A választ m, M, v és ϑ függvényében adjuk meg.

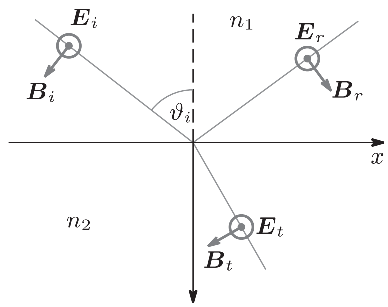
3. Ha kezdetben a korong helyzete $l = (R-r)/2$, határozzuk meg a korong és a henger sebességének x- és y-komponenseit közvetlenül az n-edik ütközés után.

4. Milyen feltételnek kell l-re teljesülnie, hogy a korong az n-edik ütközés után y-irányú sebességgel mozogjon, és az M henger nyugalomban maradjon? Határozzuk meg a henger középpontjának két egymást követő nyugalmi helyzete közötti távolságot.

5. Ebben a részben a korong és a henger közötti súrlódás nem hanyagolható el. Az 1. részhez hasonlóan a henger nyugalomban van, a korong középpontja pedig $l < (R-r)$ távolságra van a henger középpontjától, és y-irányú sebességgel mozog a *2. ábrán* látható módon. Feltéve, hogy az ütközés folyamata során az érintkezési pont nem csúszik el, határozzuk meg a korong és a henger szögsebességét közvetlenül az első ütközés után.

3. feladat. Szigetelő hullámvezető lemez.

1. Teljes visszaverődés. Egy polarizált monokromatikus elektromágneses síkhullám elektromos tere általánosan $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}\exp(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)$ alakban adható meg, ahol $\boldsymbol{E}$ a hullám amplitúdója, $\boldsymbol{k}$ a hullámszámvektor és ω a körfrekvencia. Tegyük fel, hogy egy n_1 törésmutatójú közegben ω körfrekvenciájú monokromatikus síkhullám terjed, ami elér egy n_2 törésmutatójú közeget. A bejövő hullám ϑ_i szöget zár be a határfelület beesési merőlegesével. A probléma során csak transzverzálisan polarizált hullámokkal foglalkozunk, azaz olyanokkal, amelyekben az elektromos mező merőleges a beesési síkra. Egyik közeg sem mágneses.

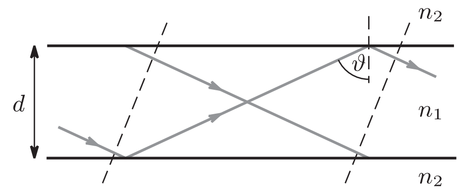


3.a) ábra

1. Ha $n_1 > n_2$, létezik egy ϑ_c határszög, amelyre teljesül, hogy a $\vartheta_i > \vartheta_c$ szög alatt beérkező hullámok teljesen visszaverődnek (total internal reflection: TIR). A visszavert hullám fázisa δ-val késik a bejövőhöz képest. Vezessük le δ-t, és adjuk meg n_1, n_2, és ϑ_i függvényében.

2. A szükséges határfeltételek felhasználásával adjuk meg a visszaverődés R mértékét $n_1 > n_2$ esetén. Mutassuk meg, hogy a hullám teljesen visszaverődik minden $\vartheta_i > \vartheta_c$ esetén.

2. Erősítő fáziscsatolás. A legegyszerűbb dielektromos hullámvezető egy d vastagságú, n_1 törésmutatójú síklemez, amit homogén, n_2 törésmutatójú közeg vesz körül ($n_1 > n_2$). TIR esetén a lemez felhasználható hullámok veszteség nélküli továbbítására, feltéve, hogy a hullámok interferenciája erősítő, azaz a hullámfrontok megmaradnak a hullám terjedése során a hullámvezetőben. A hullámszámok vákuumban, az n_1 és az n_2 törésmutatójú közegben rendre k_0, k_1, és k_2.



3.b) ábra

1. Határozzuk meg az erősítő fáziscsatolás szükséges feltételét.

2. A hullámot csak ϑ bizonyos értékei esetén lehet veszteségmentesen továbbítani. Mutassuk meg, hogy ϑ-nak ki kell elégítenie a következő egyenletet:

$$k_1 d\cos\vartheta - \delta = m\pi; \quad m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Igazoljuk, hogy a fenti egyenlet így is felírható:

$$\sqrt{u^2+v^2} = \frac{k_0 d}{2}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}, \tag{2}$$

$$u\tan u = v \quad \text{vagy} \quad u\cot u = v, \tag{3}$$

ha $u = \dfrac{k_1 d}{2} \cos\vartheta$ és $v = \dfrac{d}{2}\sqrt{k_1^2 \sin^2\vartheta - k_2^2}$.

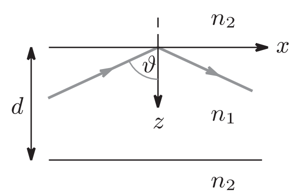
3. Maxwell-egyenletek. A Maxwell-féle hullámegyenlet egy ε relatív dielektromos állandójú közegben az elektromos térerősségre:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2}. \tag{4}$$

A *3.c) ábrán* látható hullámvezető lemez esetén $\varepsilon = n_1^2$, ha $0 < z < d$, különben pedig $\varepsilon = n_2^2$. Olyan koordinátarendszerben, amelyben a hullám az xz-síkban terjed, az elektromos térerősség általánosan

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}(x, z, t) = \boldsymbol{E}(z) \exp\big(i(\beta x - \omega t)\big) \tag{5}$$

alakban adható meg, ahol β az effektív terjedési állandó a hullámvezetőben, figyelembe véve a rendszer eltolási szimmetriáját az x-tengely irányában. A transzverzálisan polarizált hullámok továbbítása esetén $\boldsymbol{E}(z)$ y-irányú, továbbá $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$-nek egyszerű harmonikus rezgésnek kell lennie a rétegen belül, azon kívül pedig exponenciálisan kell lecsengenie.



3.c) ábra

1. Mi a kapcsolat β, k_1 és ϑ között?

2. A $z = 0$ és $z = d$ értéknél felírható határfeltételek felhasználásával vezessük le a hullámvezetés 2. részben megkapott feltételét a Maxwell-egyenletekből.

4. Normál módusok. A normál módusok ϑ azon értékeihez kötődnek, amikor a lemezben hullámvezetés történik. Az $m = 0$-hoz (lásd 2. rész) tartozó módus az alapmódus (legalacsonyabb módus, első módus), az $m = 1$-hez tartozó módus a második módus stb.

1. Vázoljunk fel az (u, v) koordinátarendszerben a (2) és a (3) egyenleteket leíró görbéket. Határozzuk meg annak szükséges feltételét, hogy csak egy normál módus létezzen.

2. Mutassuk meg, hogy a szigetelő lemez által támogatott módusok maximális száma

$$M = \left\lceil \frac{k_0 d}{\pi}\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \right\rceil, \tag{6}$$

ahol $\lceil x \rceil$ azt a legkisebb egész számot jelöli, amely legalább akkora, mint x.

3. Igazoljuk, hogy a körfrekvencia minden

$$\Delta\omega = \frac{\pi c}{d\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \tag{7}$$

emelkedése a módusok számát eggyel növeli.

4. Az (1) egyenlet alapján mutassuk meg, hogy a csoportsebesség $(\partial\omega/\partial\beta)$ minden támogatott normál módusra

$$v_g = \frac{d\tan\vartheta + \frac{\partial\delta}{\partial\beta}}{\frac{n_1 d}{c\cos\vartheta} - \frac{\partial\delta}{\partial\omega}}. \tag{8}$$

5. Mutassuk meg, hogy az L távolság befutásához szükséges idők közötti legnagyobb időkülönbség a különböző módusokban terjedő hullámok esetén

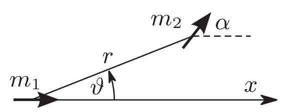
$$\tau = \frac{L}{c}(n_1 - n_2). \tag{9}$$

6. Legyen $n_1 = 1{,}7$; $n_2 = 1{,}5$; $\lambda = 800$ nm (vákuumban) és $d = 1\mu$m. Határozzuk meg az összes módust $\vartheta > \vartheta_c$-re. Ábrázoljuk az $E(z)$ elektromos térerősséget ezekre a módusokra.

4. feladat. Mágneses dipólus rezgése. Egy m_1 mágneses nyomatékkal rendelkező dipólust helyezünk az origóba, melynek mágnesesnyomaték-vektora a $+x$ irányba mutat.

1. Határozzuk meg a mágneses indukciót a tér minden pontjában.

2. Egy másik dipólust helyezünk az origótól r távolságra, ennek helyvektora ϑ szöget zár be az x-tengellyel. A második dipólus m_2 mágneses nyomatéka α szöget zár be az x-tengellyel. Az elrendezés a *4. ábrán* látható. Határozzuk meg a második dipólusra ható forgatónyomatékot.



4. ábra

3. Határozzuk meg a két dipólus közti kölcsönhatási energiát.

4. Határozzuk meg a második dipólusra ható erőt.

5. A két dipólust egy elhanyagolható tömegű fonállal összekötjük úgy, hogy a kettő távolsága r maradjon. Míg az első dipólus helye és iránya rögzített, a második szabadon mozoghat (r távolságban) az ábra síkjában, és irányítottsága is szabadon változhat. Írjuk fel a második dipólus mozgásegyenletét. A második dipólus tömege és tehetetlenségi nyomatéka rendre m és I.

6. Kezdetben a második dipólus rögzítve van az x-tengelyen, a mágneses nyomatéka $\alpha_0 \ll 1$ szöget zár be az x-tengellyel. A második dipólus rögzítését $t = 0$-kor feloldjuk. Írjuk fel a második dipólus mozgásegyenletét, figyelembe véve, hogy ϑ és α kicsi. Legyen $I = mr^2/5$.

7. A rendszer harmonikus rezgést végez. Határozzuk meg a rezgés normál módusainak frekvenciáit. A rendszer normál módusban van, ha a rezgés paraméterei fázisban vannak, azaz így írhatók fel: $\vartheta = \vartheta_0 \cos(\omega t + \varphi)$ és $\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi)$. ω-nak két lehetséges értéke van (jelölje ezeket ω_1 és ω_2). Határozzuk meg ω_1 és ω_2 értékét.

8. Az egyes normál módusokra határozzuk meg α és ϑ amplitúdóinak hányadosát, $c_1 = \alpha_1/\vartheta_1$-et és $c_2 = \alpha_2/\vartheta_2$-t.

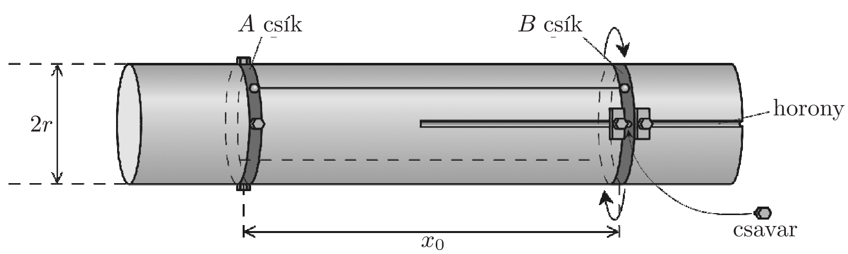
9. A rendszert a következő összefüggések írják le:

$$\vartheta = \vartheta_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \vartheta_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2);$$
$$\alpha = c_1\vartheta_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + c_2\vartheta_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

A kezdeti feltételek felhasználásával határozzuk meg ϑ_1, φ_1, ϑ_2 és φ_2 értékét.

5. feladat. Csavaros kötél. Két egyforma, m tömegű fémcsíkot egy nagy, súrlódásmentes hengerre helyezünk. A csíkokat két rugalmas kötéllel kötjük össze, úgy, hogy a kötelek nyújtatlanok és párhuzamosak egymással. A kötelek rugóállandója k és követik a Hooke-törvényt. A kötelek rögzítési pontja mindkét csíkon egy átmérő két végpontján van. Az így kapott eszközt az *5. ábra* mutatja. Az A csíkot a hengerre csavarozzuk, míg a B csík szabadon mozoghat és foroghat a henger tengelye körül.

1. A hengert függőleges helyzetbe állítjuk állandó g nehézségi erőtérben úgy, hogy az A csík a B csík fölé kerüljön. A B csíkot ezután N-szer körbeforgatjuk, a két csík közti távolságot x_0 értéken tartva. Ezután a B csík forgását meggátoljuk egy csavarral, ahogy az *5. ábrán* láthatjuk.



5. ábra. Az eszköz kezdeti elrendezésében. A csavar a B csík forgásának meggátlására használható

a) Adjunk meg egy olyan egyenletet, amelyből a paraméterek numerikus értékeinek ismeretében x_1, az új egyensúlyi helyzet meghatározható.

b) Bizonyos feltételek mellett a fémcsík harmonikus rezgést végez. Határozzuk meg a kis Δx amplitúdójú rezgések frekvenciáját k, r, N, x_0 és x_1 függvényében.

2. A hengert újra vízszintes helyzetbe hozzuk, a köteleket visszaállítjuk eredeti állapotukba, és a forgását megakadályozzuk a csavarral.

a) A B csíkra F vízszintes feszítőerővel hatunk. Ha az erőt nagyon lassan, fokozatosan növeljük, a kötelek F_0 erőnél szakadnak el. Mekkora a legkisebb minimális állandó erő, amely a kötelek elszakításához szükséges?

b) A B csíkot a rögzítés előtt N-szer körbeforgatjuk, a köteleket nyújtatlanul tartva. Határozzuk meg a kötelek elszakításához szükséges minimális erőt, ha az erőt

(i) nagyon lassan növeljük,

(ii) állandó értéken tartjuk.

3. A rendszer eredeti vízszintes helyzetében van. A B csík rögzítését feloldjuk és ϑ_0 szöggel elforgatjuk, miközben a két csík távolsága x_0 marad, majd elengedjük (kezdetben $\dot{x}(0) = 0$ és $\dot{\vartheta}(0) = 0$).

a) Írjuk fel a B csík mozgásegyenletét.

b) Oldjuk meg a mozgásegyenletet $x(t)$-re és $\vartheta(t)$-re.

c) Adjuk meg a maximális sebességet és szögsebességet, valamint a csíkok összeütközéséig eltelő T időt.

6. feladat. Folyékony levegő. Oxigén és nitrogén keverékét tartjuk egy zárt, egyik végén dugattyúval ellátott tartályban állandó $T = 77{,}4$ K hőmérsékleten. A gázkeverék teljes anyagmennyisége 1,1 mol, kezdeti nyomása 0,5 atm. A dugattyú segítségével a gázkeveréket állandó hőmérsékleten lassan összenyomjuk.

Elfogadható közelítésekkel élve ábrázoljuk a rendszer nyomását a térfogat függvényében a kezdeti térfogat tizedéig, ha az oxigén és a nitrogén anyagmennyiségének aránya $\left(n_{\mathrm{O}_2}/n_{\mathrm{N}_2}\right)$

(a) 1/9;

(b) 2/9;

(c) 1/4.

Határozzuk meg a nyomás és a térfogat értékét ezen izotermák jellegzetes pontjaiban.

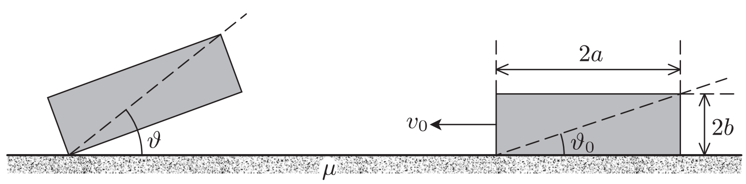
A következő adatok állnak rendelkezésünkre:

– 1 atm nyomáson a folyékony nitrogén forráspontja: 77,4 K;

– 1 atm nyomáson a folyékony oxigén forráspontja: 90,2 K;

– az oxigén párolgáshője: 213 J/g.

7. feladat. Csúszó hasáb. Egy $2b$ magasságú, $2a$ hosszúságú, M tömegű, téglatest alakú hasáb nyugszik érdes talajon, ahol a csúszási súrlódási együttható μ. A hasábot egy erős ütéssel mozgásba hozzuk úgy, hogy az hirtelen v_0 vízszintes sebességet kap. Bizonyos körülmények között a hasáb hátsó vége felemelkedik és a hasáb forogni is fog az alsó elülső éle körül, ami a talajon marad.



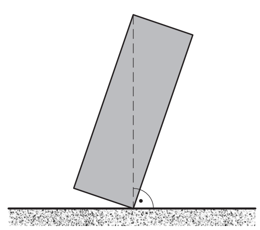
6.a) ábra. A hasáb, miután megkapta kezdeti sebességét

1. Vezessük le a hasáb forgómozgásának egyenletét θ, a, b, μ és g függvényében.

2. Adjuk meg azt a feltételt, nevesül μ értékét, ami lehetővé teszi a fentiek bekövetkezését.

A következő kérdésnél feltesszük, hogy a fenti feltétel teljesül.

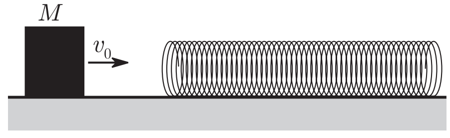
3. Tekintsünk egy végállapotot, ahol a hasáb nyugalomban marad a *6.b) ábrán* látható helyzetben, miután a tömegközéppontja x-szel mozdult el kezdeti helyzetétől. Lehetséges-e egy ilyen végállapot? Ha igen, számítsuk ki az eléréséhez szükséges kezdeti sebességet az alábbi adatokkal: $a = 0{,}8$ m; $b = 1{,}0$ m; $\mu = 0{,}9$; $x = 1{,}65$ m; $\dot{\theta}_{\max} = 1{,}27\ \mathrm{s}^{-1}$.



6.b) ábra. A hasáb kívánt végállapota

Megjegyzés: a, b és μ ismeretében a kezdeti sebesség numerikusan kiszámítható.

8. feladat. „Rugó és tömeg” probléma. 1. Egy M tömegű test mozog egy félvégtelen rugó felé v_0 kezdősebességgel a *7. ábrán* látható módon. A rugó egységnyi hosszra eső tömege μ, rugóállandója szorozva a rugóhosszal pedig $K = kL$. A test és a rugó az $x = 0$ helyen $t = 0$-kor ütközik. Adjuk meg a test sebességét az ütközés után mind az idő, mind a hely függvényében.



7. ábra

2. Ebben a feladatban egy másik, m tömegű testet helyezünk a rugó másik végére. Mennyi idő telik el az M tömegű test által kiváltott hullámfront m-hez való megérkezésétől a rugó és az m tömegű test szétválásáig? Számítsuk ki az m tömegű test sebességét is, amikor az elhagyja a rugót. Tegyük fel, hogy a rugóban a hullámok terjedési sebessége nagyobb v_0-nál, valamint a rugó elég hosszú ahhoz, hogy az m tömegű test leválásakor a visszavert hullámok még ne érjék el az M tömegű testet.

9. feladat. Két szilárd tárgy ütközési modellje. Két szilárd tárgy ütközésekor a mechanikai energiavesztés egyik módja a két test belsejében elinduló hanghullámok által felemésztett energia. Habár a valódi helyzet sokkal bonyolultabb, használjuk most a következő egyszerű modellt. Először helyettesítsük a szilárd rudakat egy-egy rugóval, melyek nyújtatlan hossza rendre L_l és L_r. A rugóállandó szorozva a rugóhosszal az egyes rugókra K_l és K_r; az egységnyi rugóhosszra eső tömeg pedig rendre ϱ_l és ϱ_r. Az l és r indexek a bal és jobb (left, right) oldali rugókat jelölik.

A bal oldali rugó $+v_0/2$, a jobb oldali pedig az ellenkező irányba $-v_0/2$ sebességgel halad. A rugók kezdetben nyújtatlanok. $t = 0$-kor a rugók az $x = 0$ helyen ütköznek. A rugók egyes pontjainak elmozdulását az $y(x,t)$ függvény írja le, tehát az ütközés után az eredetileg x koordinátájú pont a t időpontban az $x + y(x,t)$ koordinátájú pontba kerül.

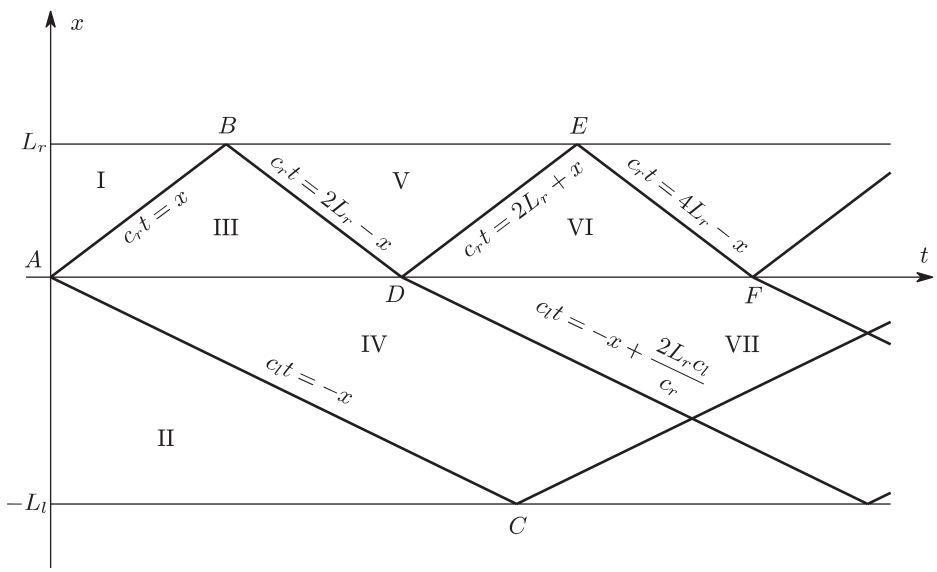
1. Vezessük le a rugók hullámegyenletét és adjuk meg a rugókban a hullámsebességet.

A hullámegyenlet általános megoldása $y(x,t) = \psi(ct - x) + \varphi(ct + x)$ alakú, ahol c a hullám terjedési sebessége. A ψ és φ függvények alakját a határfeltételekből kaphatjuk meg.

2. Írjuk fel a határfeltételeket az $x = 0$, $x = -L_l$, $x = L_r$ pontokban.

3. Írjuk fel az $y(x,t)$ függvényt az ütközés előtt ($t \le 0$), azaz az $y_{0,l}(x,t)$ és $y_{0,r}(x,t)$ függvényeket.

$t = 0$-kor akusztikus hullám indul el mindkét rugóban az $x = 0$ ütközési pontból. A rendszer dinamikáját a *8. ábrán* látható hely-idő diagramon elemezzük. A vízszintes tengely az időt, a függőleges a rugó pontjainak helyzetét mutatja. A diagram minden vonala egy akusztikus hullámfrontot ábrázol, amelyek mindig akkor indulnak el, amikor egy hullám a határhoz érkezik.



8. ábra. Hely–idő diagram

Például az AB vonal az ütközéskor az A pontból kiinduló hullámfront helyzetét ábrázolja az idő függvényében. Írják le az $f_l(c_l t + x)$ és $f_r(c_r t - x)$ függvények az ütközéskor rendre a bal, illetve a jobb oldali rugóban elinduló hullámokat, ahol c_l és c_r rendre a bal és a jobb oldali rugókban terjedő hullám sebessége. A hely-idő diagramról látható, hogy a feladatban $L_l/c_l > L_r/c_r$. Amikor az $f_r(c_r t - x)$ hullámfront eléri a B pontot, egy új $g_r(c_r t + x)$ visszavert hullám indul visszafelé. Hasonló játszódik le a bal oldali rugóban a C pontban.

Amikor a jobb oldali rugóban a $g_r(c_r t + x)$ hullámfront eléri a rugó végét (D pont az *ábrán*), egy új visszavert $\big(h_r(c_r t - x)\big)$ és egy új átvitt $\big(h_l(c_l t + x)\big)$ hullám indul el.

Ezek a jelenségek mindig bekövetkeznek, amikor egy hullámfront a két rugó valamelyik határára ér.

4. Írjuk fel az $y(x,t)$ hullámfüggvényt a diagram I, II, III, IV, V, VI és VII jelű tartományaiban y_0, f_r, f_l, g_r, h_r és h_l segítségével.

5. A határfeltétel(ek) felhasználásával határozzuk meg az $f_l(c_l t + x)$ és $f_r(c_r t - x)$ függvényeket a rugók paramétereinek és kezdősebességének függvényében.

6. Határozzuk meg az érintkezési pont sebességét közvetlenül az első ütközés után.

7. A határfeltétel(ek) felhasználásával határozzuk meg a $g_r(c_r t + x)$ függvényt a rugók paramétereinek és kezdősebességének függvényében.

Tekintsük azt az esetet, amikor a két rugó a hosszuktól eltekintve egyforma, azaz legyen $\varrho_l = \varrho_r = \varrho$ és $K_l = K_r = K$. Legyen $L_r < L_l$.

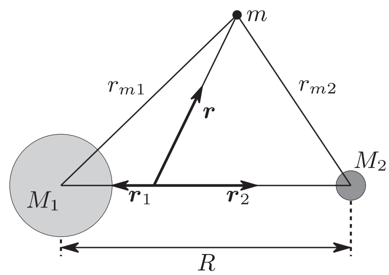
8. Határozzuk meg $y(x,t)$-t a III és a IV tartományban. Ábrázoljuk $y(x)$-et $t = 0{,}4\,L/c$-nél. A grafikon rajzolásához legyen $L_r = 0{,}6\,L$, $L_l = L$ és $v_0 = 0{,}5\,c$.

9. Határozzuk meg $y(x,t)$-t az V tartományban. Ábrázoljuk $y(x)$-et $t = 0{,}8\,L/c$-nél, L_r, L_l és v_0 az előző feladatban adott értékei mellett.

10. Mikor válik el egymástól a két rugó? Ábrázoljuk $y(x)$-et, L_r, L_l és v_0 az előző feladatban adott értékei mellett.

11. Határozzuk meg a rugók ütközésére jellemző e ütközési számot.
12. Számítsuk ki a rugók ütközés utáni és előtti összes haladó mozgási energiájának hányadosát.

10. feladat. Lagrange-pontok stabilitása. A Földdel együtt a Nap körül forgó vonatkoztatási rendszerben öt egyensúlyi helyzet létezik (ahol a testekre ható eredő erő zérus). Ezt az öt pontot Lagrange-pontnak nevezzük Joseph Lagrange után, aki először tanulmányozta a háromtest-probléma ezen esetét. A rendszer teljesen precíz elemzése rendkívül bonyolult és kaotikus. Ebben a feladatban a két test tömege (M_1 és M_2) sokkal nagyobb a harmadik testénél (m). Az M_1 és M_2 közti távolság legyen R.



9. ábra

1. A rendszer alapegyenletei

a) Írjuk fel az m-re ható eredő gravitációs erő $\boldsymbol{F}_g$ vektorát.

b) Feltéve, hogy $M_1 > M_2 \gg m$, határozzuk meg az M_1–M_2 rendszer Ω szögsebességét.

c) A rendszerrel együtt forgó vonatkoztatási rendszerben m-re ható tehetetlenségi erők lépnek fel. Írjuk fel az m-re ható eredő erő $\boldsymbol{F}_\Omega$ vektorát ebben a vonatkoztatási rendszerben.

d) Tekintsünk egy olyan koordinátarendszert, amelyben a három test az xy-síkban van, az Ω szögsebesség pedig $+z$ irányú. Az origót helyezzük az x tengelyen elhelyezkedő M_1–M_2 rendszer tömegközéppontjába. Írjuk m helyzetét $\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$ alakba. A forgó vonatkoztatási rendszerben írjuk fel az m-re ható eredő erőket, ha annak sebessége zérus. Használjuk az $\alpha = \dfrac{M_2}{M_1 + M_2}$ és $\beta = \dfrac{M_1}{M_1 + M_2}$ paramétereket.

2. A Lagrange-pontok meghatározása. Öt olyan pont van a vonatkoztatási rendszerben, amelyekben az m-re ható eredő erő zérus. Ezek közül három (L_1, L_2, L_3) az M_1M_2 egyenesen (az x-tengelyen), míg kettő az xy-síkon szimmetrikus helyzetben van az x-tengely alatt és fölött, azaz $y_4 = -y_5$.

a) Először L_1, L_2 és L_3 meghatározását végezzük el. Legyen $x = (\nu - \alpha)R$, ahol ν jelenti m és M_1 távolságát R egységben. Írjunk fel egy olyan egyenletet, amit ezeknek a pontoknak ki kell elégítenie. Az egyenletet ν-vel és α-val fejezzük ki.

b) Az egyenlet három esetre bomlik (ezek adják az egyes Lagrange-pontokat): $\nu < a$, $a < \nu < b$, és $b < \nu$. Határozzuk meg a és b értékét.

A továbbiakban feltesszük, hogy α kicsi (a Nap-Föld rendszerben ez $3{,}0 \cdot 10^{-6}$). α-val csak a legkisebb nem-nulla rendben számolunk, a magasabb rendű tagokat elhanyagoljuk. A következő kérdések segítenek az x-tengelyen fekvő Lagrange-pontok meghatározásában.

c) Az első esetben ($\nu < a$) legyen $\nu = -1 + \delta_1$, ahol δ_1 egy α-tól függő kicsiny pozitív szám. ν ezen értéke az L_1 Lagrange-pont helyzetét $x = -R(1 + \zeta_1)$ alakban adja meg. Határozzuk meg ζ_1-et α függvényében.

d) A második esetben ($a < \nu < b$) legyen $\nu = 1 - \delta_2$, ahol δ_2 egy α-tól függő kicsiny pozitív szám. ν ezen értéke az L_2 Lagrange-pont helyzetét $x = R(1 - \zeta_2)$ alakban adja meg. Határozzuk meg ζ_2-t α függvényében.

e) A harmadik esetben ($b < \nu$) legyen $\nu = 1 + \delta_3$, ahol δ_3 egy α-tól függő kicsiny pozitív szám. ν ezen értéke az L_3 Lagrange-pont helyzetét $x = R(1 + \zeta_3)$ alakban adja meg. Határozzuk meg ζ_3-at α függvényében.

A negyedik és ötödik Lagrange-pont helyzetének meghatározása összetettebb módszert igényel. Először bontsuk fel az m-re ható erőt az $\boldsymbol{r}$ vektorral párhuzamos és merőleges komponensre.

f) Adjuk meg az $\boldsymbol{r}$ vektorral párhuzamos $\hat{\boldsymbol{e}}_\parallel$ és a rá merőleges $\hat{\boldsymbol{e}}_\perp$ egységvektort az xy-síkban.

g) Határozzuk meg az m-re ható eredő erő $\boldsymbol{r}$-rel párhuzamos $F_\Omega^\parallel$ és a rá merőleges $F_\omega^\perp$ komponensét.

h) Adjuk meg az $\boldsymbol{r}$-re merőleges irányú egyensúly feltételét. Ennek felhasználásával adjuk meg az r_{m1} és r_{m2} közötti kapcsolatot.

i) Adjuk meg az $\boldsymbol{r}$-rel párhuzamos irányú egyensúly feltételét. Ennek felhasználásával adjuk meg az r_{m1} és R közötti kapcsolatot.

j) Határozzuk meg a negyedik és az ötödik Lagrange-pont helyzetét, rendre (x_4, y_4)-et és (x_5, y_5)-öt.

3. A Lagrange-pontok stabilitása. Az egyes Lagrange-pontok stabilitásának ellenőrzésére megzavarjuk m-et egyensúlyi helyzetében. Mivel ebben a rendszerben az erők m (x, y) helyétől és (v_x, v_y) sebességétől függnek, a stabilizáló erőket a helyzet és a sebesség különböző változásaira kell kiszámítani. Fejezzük ki az erőt az alábbi módon:

$$F_x\big(x_0+\delta x, y_0+\delta y, v_{x,0}+\delta v_x, v_{y,0}+\delta v_y\big) =$$

$$= \frac{\partial F_x}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial F_x}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F_x}{\partial v_x}\,\delta v_x + \frac{\partial F_x}{\partial v_y}\,\delta v_y;$$

$$F_y\big(x_0+\delta x, y_0+\delta y, v_{x,0}+\delta v_x, v_{y,0}+\delta v_y\big) =$$

$$= \frac{\partial F_y}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial F_y}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F_y}{\partial v_x}\,\delta v_x + \frac{\partial F_y}{\partial v_y}\,\delta v_y.$$

Ez az erő figyelembe veszi az m tömeg sebességének járulékát. Az összes parciális deriváltat az egyensúlyi helyzetben (x_0, y_0, $v_{x,0}$, $v_{y,0}$) számítjuk ki.

a) Adjuk meg $\frac{1}{m}\frac{\partial F_x}{\partial x}$, $\frac{1}{m}\frac{\partial F_x}{\partial y}$, $\frac{1}{m}\frac{\partial F_y}{\partial x}$, $\frac{1}{m}\frac{\partial F_y}{\partial y}$ általános alakját. Mutassuk meg, hogy $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$.

b) Számítsuk ki $\frac{1}{m}\frac{\partial F_x}{\partial v_x}$-et, $\frac{1}{m}\frac{\partial F_x}{\partial v_y}$-t, $\frac{1}{m}\frac{\partial F_y}{\partial v_x}$-et, és $\frac{1}{m}\frac{\partial F_y}{\partial v_y}$-t.

A fenti nyolc együtthatónak a rugóállandó analógiájára a zavarokat csillapítania kell. Ezek után ellenőrizzük az öt Lagrange-pont stabilitását. α-val csak a legkisebb nem-nulla rendben számoljunk, hanyagoljuk el a magasabb rendű tagokat.

c) Az első Lagrange-pont

(*i*) Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{m}\frac{\partial F_x}{\partial x} = c_1\Omega^2$, és határozzuk meg c_1-et.

(*ii*) Mutassuk meg, hogy $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$.

(*iii*) Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{m}\frac{\partial F_y}{\partial y} = c_2\alpha\Omega^2$, és határozzuk meg c_2-t.

(*iv*) $\delta x = Ae^{\lambda t}$ és $\delta y = Be^{\lambda t}$ $(A, B \neq 0)$ helyettesítésével határozzuk meg λ-t, kizárólag α és Ω függvényében.

(*v*) λ-nak négy lehetséges értéke van. Adjuk meg azt a feltételt, amit ezeknek a megoldásoknak teljesíteniük kell, hogy L_1 stabil legyen, és döntsük el, hogy L_1 stabil-e.

(*vi*) A Nap–Föld rendszerre $\alpha = 3{,}0\cdot 10^{-6}$, és $\Omega = 2\pi/\text{év}$. Ha ez a pont stabil, adjuk meg a körülötte végezhető rezgés periódusidejét (nap mértékegységben), ha nem stabil, akkor az $1/\lambda$ időállandót (szintén napokban).

d) A második Lagrange-pont

(*i*) Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{m}\frac{\partial F_x}{\partial x} = c_3\Omega^2$, és határozzuk meg c_3-at.

(*ii*) Mutassuk meg, hogy $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$.

(*iii*) Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{m}\frac{\partial F_y}{\partial y} = c_4\Omega^2$, és határozzuk meg c_4-et.

(*iv*) $\delta x = Ae^{\lambda t}$ és $\delta y = Be^{\lambda t}$ $(A, B \neq 0)$ helyettesítésével határozzuk meg λ-t, kizárólag α és Ω függvényében.

(*v*) λ-nak négy lehetséges értéke van. Adjuk meg azt a feltételt, amit ezeknek a megoldásoknak teljesíteniük kell, hogy L_2 stabil legyen, és döntsük el, hogy L_2 stabil-e.

(*vi*) Ha ez a pont a Nap–Föld rendszerben stabil, adjuk meg a körülötte végezhető rezgés periódusidejét (nap mértékegységben), ha nem stabil, akkor az $1/\lambda$ időállandót (szintén napokban).

A harmadik Lagrange-pont hasonló a másodikhoz, tehát nem kell külön foglalkoznunk vele.

e) A negyedik Lagrange-pont

(*i*) Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{m}\frac{\partial F_x}{\partial x} = c_5\Omega^2$, és határozzuk meg c_5-öt.

(*ii*) Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{m}\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{1}{m}\frac{\partial F_y}{\partial x} = (c_6 + c_7\alpha)\Omega^2$, és határozzuk meg c_6-ot és c_7-et.

(*iii*) Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{m}\frac{\partial F_y}{\partial y} = c_8\Omega^2$, és határozzuk meg c_8-at.

(*iv*) $\delta x = Ae^{\lambda t}$ és $\delta y = Be^{\lambda t}$ $(A, B \neq 0)$ helyettesítésével határozzuk meg λ-t, kizárólag α és Ω függvényében.

(*v*) Legyen $\zeta = M_1/M_2$. Határozzuk meg ζ azon értéktartományát, amire a negyedik Lagrange-pont stabil.

Az ötödik Lagrange-pont azonosan viselkedik, mint a negyedik, így nem kell külön foglalkoznunk vele.