

A 41. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia feladatainak megoldása¹

Elméleti feladatok

1. feladat. Tükörtlöltés egy fémtárgyban

1. részfeladat.

a) Mekkora az elektromos potenciál értéke a gömbön?

Mivel a gömb földelt, az elektromos potenciál a felszínén zérus.

b) A tükörtlöltés q' nagyságának és r' helyzetének meghatározása.

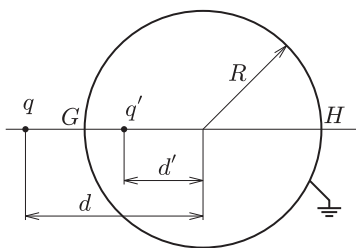
A feladat nem követeli meg a tükörtlöltés módszerének igazolását, csupán a tükörtlöltés nagyságának és helyzetének meghatározását kéri a módszer ismeretében. E két paraméter meghatározásához elegendő, ha a gömb két különböző pontjában előírjuk, hogy az elektromos potenciál legyen zérus. Célszerű a két töltés egyenesén fekvő G és H pontot választani (1. ábra):

$$\Phi_G = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{d-R} + \frac{q'}{R-d'} \right) = 0,$$

$$\Phi_H = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{d+R} + \frac{q'}{d'+R} \right) = 0.$$

Egyszerűen adódik, hogy az egyenletrendszer megoldása q' -re és d' -re:

$$q' = -q \frac{R}{d}, \quad d' = \frac{R^2}{d}.$$



1. ábra. A töltés, a tükörtlöltés és a földelt fémgömb

Megjegyzés. A kapott eredményhez két elemi geometriai tétel is kapcsolódik. Egyrészt, mivel $dd' = R^2$, a töltést és a tükörtlöltést egy olyan inverzió (gömbi tükrözés) viszi át egymásba, melynek alapgömbje a földelt fémgömb. Másrészt, az a tény, hogy a két töltés eredő potenciálja a gömbön nulla, azt jelenti, hogy a gömb pontjainak a két töltéstől mért távolságaránya állandó, tehát a gömb a két töltéshez tartozó Apollóniusz-gömb.

c) Mekkora erő hat a q töltésre?

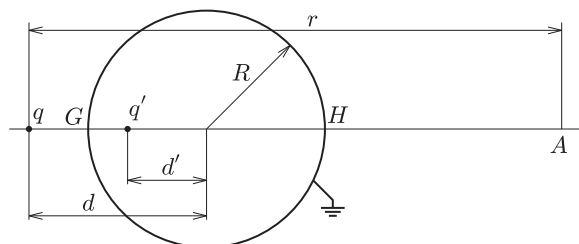
Mínt hogy a fémgömb elektromos tere a gömbön kívül megegyezik a q' tükörtlöltés terével, a gömb és a q töltés közti erő megegyezik a q és q' töltések között ható Coulomb-erővel:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot |q'|}{(d-d')^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}.$$

Mivel q és q' ellentétes előjelűek, ezért a köztük ható F erő vonzó.

2. részfeladat.

a) Mekkora az A pontban az elektromos térerősségvektor?



2. ábra. Az A pontban a földelt gömb részlegesen leárnyékolja az elektromos teret

¹ Az elméleti feladatok szövegét a múlt havi számunkban közöltük.

A földelt gömb hatását helyettesíthetjük a q' tükörtöltéssel, így az elektromos tér két ponttöltés terének eredőjeként adódik:

$$\mathbf{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r^2} - \frac{q'}{(r-d+d')^2} \right) \mathbf{e}_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{Rd}{(rd+R^2-d^2)^2} \right) \mathbf{e}_A,$$

ahol $\mathbf{e}_A$ a q töltéstől A -ba mutató egységvektor.

b) *Hogyan közelíthető ez a formula, ha $r \gg d$?*

Ha $r \gg d$, akkor az előző formula második tagja:

$$\frac{Rd}{(rd+R^2-d^2)^2} = \frac{R}{r^2d} \left(1 - \frac{d}{r} + \frac{R^2}{rd} \right)^{-2} \approx \frac{R}{r^2d} \left(1 + \frac{2d}{r} - \frac{2R^2}{rd} \right).$$

Ezt felhasználva az elektromos térerősségre az

$$\mathbf{E}_A \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{R}{d} + \frac{2R}{r} \left(\frac{R^2}{d^2} - 1 \right) \right) \mathbf{e}_A$$

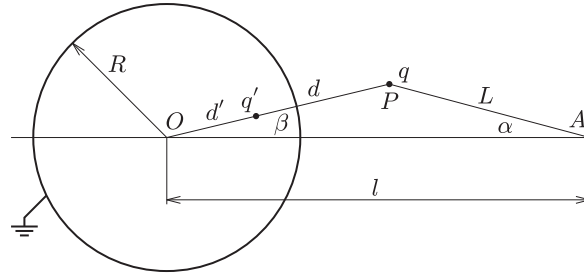
közelítő formula adódik. Látható, hogy a fémgömb árnyékoló hatása mellett is nagy távolság esetén a távolság négyzetével csökken az elektromos térerősség.

c) *Mi a feltétele a teljes leárnyékolásnak?*

A korábban levezetett képletekből látható, hogy a $d \rightarrow R$ határesetben válna teljessé a leárnyékolás.

3. részfeladat.

a) *Mekkora és milyen irányú a kitérített ingára ható elektrosztatikus erő?*



3. ábra. Az α szöggel kitérített inga és a rá ható tükörtöltés

A fémgömb által kifejtett erő megegyezik a töltés és a tükörtöltés között fellépő Coulomb-erővel. Az OAP háromszög felírt koszinusztétel alapján

$$d = \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}.$$

Így a q töltésre ható erő nagysága:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(d-d')^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R d}{(d^2 - R^2)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

Az erő a gömb középpontja felé mutat.

b) *Mekkora az erő fonalra merőleges komponense?*

Az OAP háromszög P csúcsnál levő külső szöge $\alpha + \beta$, így a keresett komponens $F_{\perp} = F \sin(\alpha + \beta)$. A szinusztétel alapján $\sin(\alpha + \beta) = \frac{l}{d} \sin \alpha$, így:

$$F_{\perp} = F \frac{l}{d} \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R l \sin \alpha}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}.$$

c) *Mennyi az inga kis rezgéseinek frekvenciája?*

A matematikai inga mozgásegyenlete $mL\ddot{\alpha} = -F_{\perp}$. Kicsiny kitérések esetén $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, így a mozgásegyenlet alakja ekkor:

$$mL\ddot{\alpha} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R l}{((l-L)^2 - R^2)^2} \alpha,$$

ahonnan a kis rezgések körfrekvenciája:

$$\omega = \frac{q}{(l-L)^2 - R^2} \sqrt{\frac{Rl}{4\pi\epsilon_0 mL}}.$$

4. részfeladat.

A feladatnak talán ez a része a legérdekesebb, mert ügyes gondolatmenetekkel szinte számolás nélkül megoldható. Jelölje $E_{\text{kölcs}}$ a q töltés és a polarizált gömb közti elektrosztatikus kölcsönhatási energiát, legyen $E_{\text{gömb}}$ a gömbön polarizált töltéeloszlás elektrosztatikus energiája, és $E_{\text{össz}}$ a teljes rendszer energiája. A feladat három alkérdésben e három energia meghatározását kéri. Világos, hogy

$$E_{\text{össz}} = E_{\text{kölcs}} + E_{\text{gömb}},$$

tehát bármely két energia ismeretében a harmadik könnyen meghatározható. Mi most egymástól függetlenül határozzuk meg a három energiát, és a végén ellenőrizzük, hogy teljesül rájuk a fenti feltétel.

a) *Mennyi a q töltés és a gömbön levő töltések közti $E_{\text{kölcs}}$ elektrosztatikus kölcsönhatási energia?*

Ez a kölcsönhatási energia negatív, hiszen a q töltés és a gömb vonzzák egymást. A kölcsönhatási energia abszolút értéke megegyezik azzal a munkával, melyet a gömb vonzása ellenében végeznünk kell, hogy a q töltést a végtelenbe távolítsuk, miközben a töltések a gömbön nem mozdulnak el. A gömbön polarizált töltés hatása a gömbön kívül pont olyan, mint a q' tükörtöltésé, tehát úgy is képzelhetjük, hogy q -t a rögzített q' tükörtöltéstől távolítjuk el. Így a kölcsönhatási energia megegyezik a q és q' közti elektrosztatikus energiával:

$$E_{\text{kölcs}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{d-d'} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R}{d^2 - R^2}.$$

b) *Mennyi a gömbön levő töltéselrendeződés $E_{\text{gömb}}$ elektrosztatikus energiája?*

Gondolatban tekintsük a polarizált gömböt sok kis q_i töltésből álló rendszernek, melyek a gömbfelszín $\mathbf{r}_i$ pontjaiban vannak. A keresett energia a párkölcsönhatási energiák összege:

$$E_{\text{gömb}} = \sum_{i < j} E_{i,j} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} E_{i,j},$$

ahol

$$E_{i,j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = q_i \Phi_j(\mathbf{r}_i) = q_j \Phi_i(\mathbf{r}_j).$$

(Itt $\Phi_i(\mathbf{r})$ a q_i töltés elektromos potenciálját jelöli az $\mathbf{r}$ helyen.) Ezt felhasználva:

$$E_{\text{gömb}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_j \Phi_j(\mathbf{r}_i).$$

De a gömb felszínén, illetve azon kívül a polarizált töltésrendszer hatása helyettesíthető a tükörtöltés hatásával, tehát $\sum_j \Phi_j(\mathbf{r}_i) = \Phi_{q'}(\mathbf{r}_i)$. Így

$$E_{\text{gömb}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi_{q'}(\mathbf{r}_i) = \frac{q'}{2} \sum_i \Phi_i(\mathbf{d}').$$

A fémgömbben, a tükörtöltés $\mathbf{d}'$ helyén a zérus elektromos potenciált a gömbön polarizált töltések és a gömbön kívül a $\mathbf{d}$ pontban található q töltés potenciáljának szuperpozíciója alakítja ki, tehát $\sum_i \Phi_i(\mathbf{d}') = -\Phi_q(\mathbf{d}')$. Ezt felhasználva végül:

$$E_{\text{gömb}} = -\frac{q'}{2} \Phi_q(\mathbf{d}') = \frac{-1}{2} E_{q,q'} = \frac{-1}{2} E_{\text{kölcs}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R}{d^2 - R^2}.$$

Látható, hogy az eredményhez az összegzéseket ténylegesen nem kellett elvégeznünk, csak ügyes okoskodásokra, a tükörtöltés módszer és a szuperpozíció elv pontos ismeretére volt szükségünk.

c) *Mennyi a rendszer teljes elektrosztatikus energiája?*

A teljes kölcsönhatási energia negatív, abszolút értéke megegyezik azzal a munkával, ami a q töltésnek a földelt fémgömbtől végtelen messzire való eltávolításához szükséges, miközben a fémgömbön is szabadon vándorolhatnak a töltések. Az 1. részfeladat c) pontjában már meghatároztuk a gömb középpontjától d távolságra levő q töltésre ható $F(d)$ erőt, tehát

$$\begin{aligned} E_{\text{össz}} &= - \int_{x=d}^{\infty} F(x) dx = - \frac{q^2 R}{4\pi\epsilon_0} \int_{x=d}^{\infty} \frac{x}{(x^2 - R^2)^2} dx = \\ &= \frac{q^2 R}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{x^2 - R^2} \right]_{x=d}^{\infty} = - \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R}{d^2 - R^2}. \end{aligned}$$

Látható, hogy teljesül az $E_{\text{össz}} = E_{\text{kölcs}} + E_{\text{gömb}}$ egyenlőség, és az energiák aránya

$$E_{\text{össz}} : E_{\text{kölcs}} : E_{\text{gömb}} = (-1) : (-2) : (+1).$$

2. feladat. Kéményfizika

1. részfeladat.

a) Mekkora minimális magasság mellett működik hatékonyan a kémény?

Jelölje $p(z)$ a külső légnyomást z magasságban. Jó közelítéssel:

$$(1) \quad p(z) = p(0) - \varrho_{\text{levegő}} g z,$$

ahol $p(0)$ a talajszinti légnyomás. A kéményben áramló füstre alkalmazhatjuk a Bernoulli-törvényt:

$$(2) \quad \frac{1}{2} \varrho_{\text{füst}} v(z)^2 + \varrho_{\text{füst}} g z + p_{\text{füst}}(z) = \text{állandó},$$

ahol $p_{\text{füst}}(z)$ a füst nyomása z magasságban, $\varrho_{\text{füst}}$ a füst sűrűsége, és $v(z)$ jelöli a füst sebességét. (Felhasználtuk azt a közelítést, hogy a füst sűrűsége nem változik a kéményben.)

A Bernoulli-törvény segítségével két pontot hasonlítunk össze; a talajszinten lévő kazánt (ahol a füst jó közelítéssel még nem mozog) és a kémény tetőpontját. A kémény akkor működik, ha a felső nyílásában a nyomás nagyobb (vagy egyenlő), mint a külső légnyomás (1). Minimális kéménymagasságnál az egyenlőség teljesül:

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \varrho_{\text{füst}} v(h)^2 + \varrho_{\text{füst}} g h + p_{\text{füst}}(h) &= \\ &= \frac{1}{2} \varrho_{\text{füst}} v(h)^2 + \varrho_{\text{füst}} g h + p(0) - \varrho_{\text{levegő}} g h \approx p(0), \end{aligned}$$

amiből kiszámíthatjuk a füst sebességét:

$$(4) \quad v(h) = \sqrt{2gh \left(\frac{\varrho_{\text{levegő}}}{\varrho_{\text{füst}}} - 1 \right)}.$$

A kémény akkor működik hatékonyan, ha a kazánból származó összes égéstermék kijut a légkörbe a kémény tetején, vagyis

$$(5) \quad v(h) \geq \frac{B}{A}.$$

A (4) és (5) egyenletek összevetésével a kémény magasságára a következő feltételt kapjuk:

$$(6) \quad h \geq \frac{B^2}{A^2} \frac{1}{2g} \frac{1}{\frac{\varrho_{\text{levegő}}}{\varrho_{\text{füst}}} - 1}.$$

A kazánban a füstöt ideális gázként kezeljük, melynek nyomása a talajszinti $p(0)$ légnyomás. Így a levegő és a füst sűrűsége között a következő összefüggés írható fel:

$$(7) \quad \frac{\varrho_{\text{levegő}}}{\varrho_{\text{füst}}} = \frac{T_{\text{füst}}}{T_{\text{levegő}}},$$

melynek segítségével megkaphatjuk a kémény minimális magasságát:

$$(8) \quad h \geq \frac{B^2}{A^2} \frac{1}{2g} \frac{T_{\text{levegő}}}{T_{\text{füst}} - T_{\text{levegő}}} = \frac{B^2}{A^2} \frac{1}{2g} \frac{T_{\text{levegő}}}{\Delta T} = h_{\text{min}}.$$

b) Milyen magas a meleg vidéken épült kémény?

A (8) összefüggés alapján:

$$(9) \quad \frac{h_{\text{meleg}}}{h_{\text{hideg}}} = \frac{\frac{T_{\text{meleg}}}{T_{\text{füst}} - T_{\text{meleg}}}}{\frac{T_{\text{hideg}}}{T_{\text{füst}} - T_{\text{hideg}}}} \implies h_{\text{meleg}} = 145 \text{ m}.$$

c) Hogyan változik a gázok sebessége a kéményben?

A (4) és a (7) összefüggések alapján láthatjuk, hogy a kéményben a füst sebessége:

$$(10) \quad v(h) = \sqrt{2gh \left(\frac{\varrho_{\text{levegő}}}{\varrho_{\text{füst}}} - 1 \right)} = \sqrt{2gh \left(\frac{T_{\text{füst}}}{T_{\text{levegő}}} - 1 \right)} = \sqrt{2gh \left(\frac{\Delta T}{T_{\text{levegő}}} \right)}.$$

Mivel abban a közelítésben dolgozunk, ahol a füst sűrűsége állandó, a kontinuitási egyenlet ($Av = \text{állandó}$) következménye az, hogy az állandó keresztmetszetű kéményben állandó a füst áramlási sebessége. Minimális kéménymagasság esetén ez az állandó sebesség: $v = B/A$. Vegyük észre, hogy a kazánban a füst még gyakorlatilag áll, majd a kéménybe történő belépéskor egy rövid szakaszon a füstgázok állandó értékre gyorsulnak fel.

d) *Hogyan változik a kéményben a gáz nyomása a magasság függvényében?*

A Bernoulli-egyenletet alkalmazzuk a kémény tetejére és egy tetszőleges, z magasságú pontra. Kihasználjuk, hogy a füstsebesség állandó:

$$(11) \quad p(h) + \frac{1}{2}\rho_{\text{füst}}v^2 + \rho_{\text{füst}}gh = p(z) + \frac{1}{2}\rho_{\text{füst}}v^2 + \rho_{\text{füst}}gz.$$

Használjuk fel az (1) egyenletet $p(h)$ kifejezésére: $p(h) = p(0) - \rho_{\text{levegő}}gh$, és fejezzük ki a kérdéses nyomást:

$$(12) \quad p(z) = p(0) - (\rho_{\text{levegő}} - \rho_{\text{füst}})gh - \rho_{\text{füst}}gz.$$

Láthatjuk, hogy a talajszinten ($z = 0$) a kéményben a nyomás kisebb a külső légnyomásnál, vagyis amikor a füst a kazánból a kéménybe jut, akkor nemcsak a sebessége változik (növekszik), a nyomása is ugrásszerűen lecsökken.

2. részfeladat.

a) *Mennyi a napkémény hatásfoka?*

A kémény által Δt idő alatt kibocsátott forró levegő mozgási energiája így írható fel a (10) összefüggés segítségével:

$$(13) \quad E_{\text{mozg}} = \frac{1}{2}(Av\Delta t\rho_{\text{forró}})v^2 = (Av\Delta t\rho_{\text{forró}})gh\frac{\Delta T}{T_{\text{levegő}}}.$$

Jelöljük a kémény léghozamát w -vel, ami megmutatja a kéményen másodpercenként áthaladó levegő tömegét ($w = \frac{\Delta m}{\Delta t} = Av\rho_{\text{forró}}$). A kémény teljesítménye így fejezhető ki w -vel:

$$(14) \quad P_{\text{hasznos}} = wgh\frac{\Delta T}{T_{\text{levegő}}}.$$

A napsugárzás által leadott teljesítmény a G napállandótól és az S felülettől függ:

$$(15) \quad P_{\text{sugárzás}} = GS = wc\Delta T,$$

ahol c a levegő fajhője. Így a napkémény maximális elméleti hatásfoka:

$$(16) \quad \eta = \frac{P_{\text{hasznos}}}{P_{\text{sugárzás}}} = \frac{gh}{cT_{\text{levegő}}}.$$

b) *Hogyan függ a hatásfok a magasságtól?*

A magasságfüggés lineáris.

3. részfeladat.

a) *Mekkora a Manzanares-ben épült napkémény hatásfoka?*

A hatásfok:

$$(17) \quad \eta = \frac{gh}{cT_{\text{levegő}}} = 0,0064 = 0,64\%.$$

b) *Mekkora teljesítménnyel működik a napkémény Manzanares-ben?*

A napkémény teljesítménye:

$$(18) \quad P = GS\eta = G(r^2\pi)\eta = 45 \text{ kW}.$$

c) *Mennyi energiát állít elő egy napsütéses napon a manzanares-i napkémény?*

Ha napi nyolc óra napsütést tételezünk fel, akkor az előállított energia 360 kWh.

4. részfeladat.

a) *Mekkora a napkéménybe lépő levegő hőmérséklet ugrása?*

Fejezzük ki a w léghozamot a (10) és a (15) összefüggésekkel:

$$(19) \quad w = Av\rho_{\text{forró}} = A\sqrt{2gh\frac{\Delta T}{T_{\text{levegő}}}}\rho_{\text{forró}},$$

$$w = \frac{GS}{c\Delta T},$$

amiből kifejezhetjük a ΔT hőmérsékletugrást:

$$(20) \quad \Delta T = \left(\frac{G^2 S^2 T_{\text{levegő}}}{A^2 c^2 \varrho_{\text{forró}}^2 2gh} \right)^{1/3} \approx 9,1 \text{ K.}$$

b) Mekkora a napkémény léghozama Manzanares-ben?

A (19) ikerösszefüggés alapján:

$$(21) \quad w = 760 \text{ kg/s.}$$

3. feladat. Egyszerű atommagmodell

1. részfeladat.

a) Egyszerű kockarácsot feltételezve, mennyi a nukleonok kitöltési tényezője?

A kocka oldaléle (a rácsállandó) legyen a . Az egymással érintkező nukleongömbök sugara így $r = \frac{a}{2}$. Egy kockára éppen nyolc nyolcad-gömb jut, tehát az f kitöltési tényező egyszerűen egy gömb és a kocka térfogatának aránya:

$$(1) \quad f = \frac{V_{\text{gömb}}}{V_{\text{kocka}}} = \frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3\pi}{a^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0,52.$$

b) Mekkora az A tömegszámú atommag tömegsűrűsége, töltéssűrűsége és sugara?

Az atommag tömegsűrűsége:

$$(2) \quad \varrho_m = f \frac{m_N}{V_N} = f \frac{m_N}{\frac{4}{3}r_N^3\pi} = 0,52 \cdot \frac{1,67 \cdot 10^{-27}}{\frac{4}{3}(0,85 \cdot 10^{-15})^3\pi} \approx 3,40 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3.$$

Az atommag töltéssűrűsége:

$$(3) \quad \varrho_c = \frac{f}{2} \frac{e}{V_N} = \frac{f}{2} \frac{e}{\frac{4}{3}r_N^3\pi} = \frac{0,52}{2} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{\frac{4}{3}(0,85 \cdot 10^{-15})^3\pi} \approx 1,63 \cdot 10^{25} \text{ C/m}^3,$$

ahol figyelembe vettük, hogy csak a protonoknak van töltésük, ugyanannyi neutronnak nincs.

Ha a nukleonok száma A , akkor az atommag térfogata így fejezhető ki:

$$(4) \quad V = \frac{AV_N}{f}.$$

Ennek megfelelően az atommag sugara:

$$(5) \quad R = r_N \left(\frac{A}{f} \right)^{1/3} = \frac{0,85}{0,52^{1/3}} A^{1/3} \approx 1,06 \text{ fm} \cdot A^{1/3},$$

ahol az 1,06 fm-es szorzótényezőt a továbbiakban r_0 -al jelöljük.

2. részfeladat.

Mekkora az A tömegszámú atommag kötési energiája?

A felületi nukleonokat egy $2r_N$ vastagságú héjban képzeljük el az atommag felszínén. Így kiszámíthatjuk a felületi nukleonok számát:

$$(6) \quad A_{\text{felület}} = f \frac{V_{\text{felület}}}{V_N},$$

ahol a felszíni gömbhéj térfogata:

$$(7) \quad V_{\text{felület}} = \frac{4}{3}R^3\pi - \frac{4}{3}(R - 2r_N)^3\pi.$$

A kötési energiához a felületi nukleonok feleakkora taggal járulnak hozzá, mint az atommag belsejében lévők:

$$(8) \quad E_b = (A - A_{\text{felület}})a_V + A_{\text{felület}} \frac{a_V}{2}.$$

Az (5), (6) és (7) összefüggések figyelembevételével a (8) kötési energiára ezt az eredményt kapjuk:

$$(9) \quad \begin{aligned} E_b &= Aa_V - A_{\text{felület}} \frac{a_V}{2} = Aa_V - 3f^{1/3}A^{2/3}a_V + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V - 4fa_V = \\ &= (15,8A - 38,2A^{2/3} + 61,6A^{1/3} - 33,1) \text{ MeV.} \end{aligned}$$

3. részfeladat.

a) Mekkora az atommag elektrosztatikus energiája?

Ha a megadott képletben Q_0 helyére Ze értéket helyettesítünk, akkor az atommag elektrosztatikus energiájára ezt az összefüggést kapjuk:

$$(10) \quad U_C = \frac{3(Ze)^2}{20\pi\epsilon_0 R} = \frac{3Z^2 e^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

Vegyük figyelembe, hogy a protonok önmagukra nem hatnak, tehát (az útmutatás szerint) Z^2 helyére $Z(Z-1)$ -et kell írunk:

$$(11) \quad U_C = \frac{3Z(Z-1)e^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

b) Hogyan írható fel az atommag teljes kötési energiája?

A teljes kötési energia úgy írható fel, hogy a (9) kifejezésből kivonjuk a (11) Coulomb-tagot, mert a pozitív elektrosztatikus energia csökkenti az atommag kötési energiáját. (A kötési energiát úgy értelmezzük, mint az atommag nukleonokra bontásához szükséges minimális energiát.) A számolás során az atommag R sugarára az (5) összefüggést használjuk, továbbá kihasználjuk azt is, hogy $Z \approx \frac{A}{2}$:

$$(12) \quad \begin{aligned} E_b^{\text{teljes}} &= E_b - U_C = \\ &= Aa_V - 3f^{1/3}A^{2/3}a_V + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V - 4fa_V - \frac{3Z(Z-1)e^2}{20\pi\epsilon_0 R} = \\ &= Aa_V - 3f^{1/3}A^{2/3}a_V + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V - 4fa_V - \frac{3e^2 f^{1/3}}{20\pi\epsilon_0 r_N} \left(\frac{A^{5/3}}{4} - \frac{A^{2/3}}{2} \right). \end{aligned}$$

4. részfeladat.

a) Mekkora a bomlástermékek együttes mozgási energiája?

A bomlástermékek együttes mozgási energiáját a kötési energiák különbségéből, illetve a két fél mag $\left(\frac{Z}{2} = \frac{A}{4}\right)$ Coulomb-energiájának figyelembevételéből határozhatjuk meg:

$$(13) \quad \begin{aligned} E_{\text{mozg}}(d) &= 2E_b^{\text{teljes}}\left(\frac{A}{2}\right) - E_b^{\text{teljes}}(A) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{A^2 e^2}{4d^2} = \\ &= -3f^{1/3}A^{2/3}a_V(2^{1/3} - 1) + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V(2^{2/3} - 1) - 4fa_V - \\ &\quad - \frac{3e^2 f^{1/3}}{20\pi\epsilon_0 r_N} \left[\frac{A^{5/3}}{4}(2^{-2/3} - 1) - \frac{A^{2/3}}{2}(2^{1/3} - 1) \right] - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{A^2 e^2}{16d^2}. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az Aa_V típusú fő járulékok kiesnek.

b) Mekkora tömegszám esetén lehetséges bomlás?

A mozgási energia fenti (13) kifejezésébe helyettesítsük be a $d = 2R\left(\frac{A}{2}\right)$ távolságot:

$$(14) \quad \begin{aligned} E_{\text{mozg}} &= 2E_b^{\text{teljes}}\left(\frac{A}{2}\right) - E_b^{\text{teljes}}(A) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2^{1/3}A^2 e^2}{16 \cdot 2r_N A^{1/3} f^{-1/3}} = \\ &= -3f^{1/3}A^{2/3}a_V(2^{1/3} - 1) + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V(2^{2/3} - 1) - 4fa_V - \\ &\quad - \frac{e^2 f^{1/3}}{\pi\epsilon_0 r_N} \left[\frac{3}{80}(2^{-2/3} - 1) + \frac{2^{1/3}}{128} \right] A^{5/3} - \frac{e^2 f^{1/3}}{\pi\epsilon_0 r_N} \left[\frac{3}{40}(2^{1/3} - 1) \right] A^{2/3} = \\ &= (0,02203 A^{5/3} - 10,0365 A^{2/3} + 36,175 A^{1/3} - 33,091) \text{ MeV}. \end{aligned}$$

A megadott tömegszámokat numerikusan behelyettesítve a következő értékeket kapjuk:

$A = 100$	$\rightarrow$	$E_{\text{mozg}} = -33,95 \text{ MeV},$
$A = 150$	$\rightarrow$	$E_{\text{mozg}} = -30,93 \text{ MeV},$
$A = 200$	$\rightarrow$	$E_{\text{mozg}} = -14,10 \text{ MeV},$
$A = 250$	$\rightarrow$	$E_{\text{mozg}} = +15,06 \text{ MeV}.$

Modellünk szerint a bomlás akkor következik be, ha a mozgási energia értéke pozitív. Durva becsléssel ez nagyjából $A > 225$ esetén teljesül. (Pontosabb számítással a mozgási energia $A = 227$ -nél vált előjelet.)

5. részfeladat.

a) Mekkora a nikkelmag gerjesztési energiája a transfer reakció után?

Ezt a részkérdést nemrelativisztikusan és relativisztikusan is meg lehet oldani. Az Olvasóra bízunk, hogy melyik módszert tartja egyszerűbbnek.

Nemrelativisztikus megoldás: Először is határozzuk meg, hogy mennyi tömeg alakul át energiává a reakcióban, vagyis határozzuk meg a reakció úgynevezett Q értékét. A tömegváltozás:

$$(15) \quad \begin{aligned} \Delta m &= (\text{tömeg})_{\text{reakció után}} - (\text{tömeg})_{\text{reakció előtt}} = \\ &= (57,935\,35 + 12,000\,00) \text{ u} - (53,939\,62 + 15,994\,91) \text{ u} = \\ &= 0,000\,82 \text{ u} = 1,36 \cdot 10^{-30} \text{ kg}. \end{aligned}$$

(A fenti képletben u az atomi tömegegységet jelöli, amit régebben a.t.e., vagy az angol megfelelőjére utalva a.m.u. módon is írtak.) A tömeg növekedése azt mutatja, hogy a reakció után a termékek mozgási energiája kisebb kell legyen a kezdetinél. A reakció Q értéke:

$$(16) \quad \begin{aligned} Q &= (\text{mozgási energia})_{\text{reakció után}} - (\text{mozgási energia})_{\text{reakció előtt}} = \\ &= -\Delta mc^2 = -1,224 \cdot 10^{-13} \text{ J} = -0,764 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Használunk kell (egy dimenzióban) a lendületmegmaradás, és az energiamegmaradás törvényét:

$$(17) \quad m(^{16}\text{O})v(^{16}\text{O}) = m(^{12}\text{C})v(^{12}\text{C}) + m(^{58}\text{Ni})v(^{58}\text{Ni}),$$

$$(18) \quad E_{\text{mozg}}(^{16}\text{O}) + Q = E_{\text{mozg}}(^{12}\text{C}) + E_{\text{mozg}}(^{58}\text{Ni}) + E_{\text{exc}}(^{58}\text{Ni}),$$

ahol az utolsó tag a nikkelmag gerjesztési energiája. Mivel a berepülő oxigénmag és a kirepülő szénatommag sebessége megegyezik, a lendületmegmaradási egyenlet így egyszerűsödik:

$$(19) \quad [m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})]v(^{16}\text{O}) = m(^{58}\text{Ni})v(^{58}\text{Ni}).$$

A szén- és a nikkelmag mozgási energiáját kifejezhetjük a berepülő oxigén megadott mozgási energiája és az ismert magtömegek alapján, és ezt (egyszerű, bár kissé hosszadalmas számolás után) beírhatjuk az energia egyenletbe:

$$(20) \quad \begin{aligned} E_{\text{exc}}(^{58}\text{Ni}) &= Q + E_{\text{mozg}}(^{16}\text{O}) - E_{\text{mozg}}(^{12}\text{C}) - E_{\text{mozg}}(^{58}\text{Ni}) = \\ &= Q + E_{\text{mozg}}(^{16}\text{O}) \frac{[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})] \cdot [m(^{58}\text{Ni}) + m(^{12}\text{C}) - m(^{16}\text{O})]}{m(^{58}\text{Ni})m(^{16}\text{O})} \approx \\ &\approx 10,9 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Érdekes észrevenni, hogy a végeredmény tört kifejezésének számlálójában lévő első szögletes zárójelben lényegében az átadott tömeg (egy alfa-részecske) szerepel, míg a második szögletes zárójelben a vasatommag tömege található.

Relativisztikus megoldás: Relativisztikusan így írhatjuk fel az energia- és az impulzusmegmaradást:

$$(21) \quad \begin{aligned} m(^{54}\text{Fe})c^2 + \frac{m(^{16}\text{O})c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{16}\text{O})}{c^2}}} &= \frac{m(^{12}\text{C})c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{12}\text{C})}{c^2}}} + \frac{m^*(^{58}\text{Ni})c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{58}\text{Ni})}{c^2}}}, \\ \frac{m(^{16}\text{O})v(^{16}\text{O})}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{16}\text{O})}{c^2}}} &= \frac{m(^{12}\text{C})v(^{12}\text{C})}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{12}\text{C})}{c^2}}} + \frac{m^*(^{58}\text{Ni})v(^{58}\text{Ni})}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{58}\text{Ni})}{c^2}}}. \end{aligned}$$

A fenti egyenletekben mindenhol a nyugalmi tömegek szerepelnek. A magasan gerjesztett nikkelmag nyugalmi tömege (m^*) nagyobb, mint az alapállapotú nikkelé, ezt jelzi a csillag.

Ha figyelembe vesszük, hogy az oxigén- és a szénmag sebessége megegyezik, akkor az egyenletek egyszerűsödnek:

$$(22) \quad \begin{aligned} m(^{54}\text{Fe}) + \frac{m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{16}\text{O})}{c^2}}} &= \frac{m^*(^{58}\text{Ni})}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{58}\text{Ni})}{c^2}}}, \\ \frac{[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})]v(^{16}\text{O})}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{16}\text{O})}{c^2}}} &= \frac{m^*(^{58}\text{Ni})v(^{58}\text{Ni})}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{58}\text{Ni})}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Ha az utóbbi két egyenletet elosztjuk egymással, akkor a nikkelmag sebességét ki tudjuk fejezni az oxigén sebességével és tömegadatokkal:

$$(23) \quad v(^{58}\text{Ni}) = \frac{[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})] \cdot v(^{16}\text{O})}{[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})] + m(^{54}\text{Fe}) \sqrt{1 - \frac{v^2(^{16}\text{O})}{c^2}}}.$$

Az oxigén sebességét pedig a mozgási energia relativisztikus alakjából fejezhetjük ki:

$$(24) \quad E_{\text{mozg}}(^{16}\text{O}) = \frac{m(^{16}\text{O})c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{16}\text{O})}{c^2}}} - m(^{16}\text{O})c^2,$$

amiből kissé fáradságos átrendezés után

$$(25) \quad v(^{16}\text{O}) = \sqrt{1 - \left(\frac{m(^{16}\text{O})c^2}{E_{\text{mozg}}(^{16}\text{O}) + m(^{16}\text{O})c^2} \right)^2} \cdot c \approx 0,081\,72 \cdot c \approx 2,45 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ezt az értéket (23)-ba helyettesítve megkapjuk a nikkelmag sebességét:

$$(26) \quad v(^{58}\text{Ni}) = \frac{[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})] \cdot v(^{16}\text{O})}{[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})] + m(^{54}\text{Fe}) \sqrt{1 - \frac{v^2(^{16}\text{O})}{c^2}}} \approx 1,69 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Mindezek után kiszámíthatjuk a gerjesztett állapotú nikkelmag tömegét:

$$(27) \quad m^*(^{58}\text{Ni}) = [m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})] \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{58}\text{Ni})}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{16}\text{O})}{c^2}}} \cdot \frac{v(^{16}\text{O})}{v(^{58}\text{Ni})} \approx 57,95 \text{ u}.$$

Ezek után a nikkelmag gerjesztési energiájának kiszámítása már gyerekjáték:

$$E_{\text{exc}} = [m^*(^{58}\text{Ni}) - m(^{58}\text{Ni})]c^2 = 10,8636 \text{ MeV}.$$

Három értékes jegyre pontosan visszakaptuk a nemrelativisztikusan számolt végeredményt, ami azt mutatja, hogy jogos volt a nemrelativisztikus számolás.

b) Mekkora a nikkelmag által kibocsátott gamma-foton energiája a kétféle vonatkoztatási rendszerben?

Újra az energia- és az impulzusmegmaradás törvényét kell felírunk a nikkelmagra. Az egyenletek bal oldalára a gerjesztett állapotot jellemző tagokat írjuk, míg a jobb oldalukra a „legerjesztés” utáni tagokat:

$$(28) \quad \begin{aligned} E_{\text{exc}}(^{58}\text{Ni}) &= E_\gamma + E_{\text{visszalökődés}}, \\ 0 &= p_\gamma - p_{\text{visszalökődés}}, \end{aligned}$$

ahol az impulzusokat az atom- és magfizikában megszokott módon p -vel jelöltük. A fotonok energiája és impulzusa között a következő általános összefüggés érvényes:

$$(29) \quad E_\gamma = p_\gamma c.$$

A nikkelmag visszalökődési energiáját klasszikusan számolhatjuk, hiszen az előzőekben láttuk, hogy a problémát jól kezelhetjük nemrelativisztikusan is:

$$(30) \quad E_{\text{visszalökődés}} = \frac{p_{\text{visszalökődés}}^2}{2m(^{58}\text{Ni})} = \frac{p_\gamma^2}{2m(^{58}\text{Ni})} = \frac{E_\gamma^2}{2m(^{58}\text{Ni}) \cdot c^2}.$$

Eredményünket helyettesítsük be a (28) energiamegmaradási egyenletébe:

$$(31) \quad E_{\text{exc}}(^{58}\text{Ni}) = E_\gamma + E_{\text{visszalökődés}} = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2m(^{58}\text{Ni}) \cdot c^2},$$

ami E_γ -ra nézve egy másodfokú egyenlet. Ennek fizikailag értelmes megoldása: $E_\gamma = 10,8625 \text{ MeV}$, vagyis ennyi a gamma-foton energiája abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyben a gerjesztett nikkelmag nyugalomban van. Mindezek után már könnyen meghatározhatjuk a nikkelmag visszalökődési energiáját:

$$(32) \quad E_{\text{visszalökődés}} = E_{\text{exc}}(^{58}\text{Ni}) - E_\gamma = 1,1 \text{ keV}.$$

Mivel a gammát sugárzó nikkelmag nagy sebességgel mozog a laboratóriumi rendszerben a detektor felé, így az észleléskor a detektor a relativisztikus Doppler-effektus szerint megváltozott frekvenciájának „érzi” a vele szembe mozgó gamma-fotont:

$$(33) \quad f_{\text{detektor}} = f_{\gamma, \text{kisugárzott}} \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

A foton energiája és frekvenciája között érvényes a Planck-formula ($E = hf$), vagyis a fotonenergiákra is érvényes a Doppler-képlet:

$$(34) \quad E_{\text{detektor}} = E_{\gamma, \text{kisugárzott}} \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}},$$

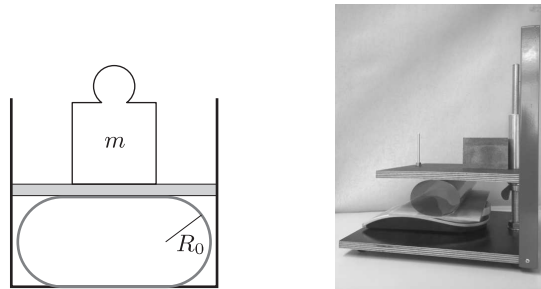
ahol $\beta = \frac{v}{c}$. A nikkelmag sebességét a (26) összefüggés alapján számítottuk ki, aminek a felhasználásával megkapjuk a detektor által észlelt gamma-foton energiáját: $E_{\text{detektor}} = 10,924 \text{ MeV}$.

Kísérleti feladat

A kísérleti feladat két részből állt, melyek megoldásához részben ugyanazokat a kísérleti eszközöket kellett használni.

1. feladat. Lapok rugalmassága

Ebben a feladatban írásvetítő fólia rugalmassági adatait, hajlítási szilárdságát és Young-modulusát vizsgálták a versenyzők. Először a fóliát henger alakúra kellett hajlítani, majd egy speciális „présszel” a hengert oldalról összenyomva a nyomóerő függvényében a benyomódást mérték. Az elrendezés elvi vázlata és fényképe az 1. ábrán látható.



1. ábra. Az elrendezés elvi rajza, és a henger alakúra hajlított fólia a rugalmasságát mérő présszel

A prés alján egy digitális mérleg helyezkedett el, erről lehetett leolvasni az $F = mg$ nyomóerőt. (A mérleg az m tömeget jelezte ki grammokban.) A prés felső lapját szárnyas anyacsavarral lehetett finoman mozgatni. A csavar elfordulásából következtetni lehetett a benyomódásra.

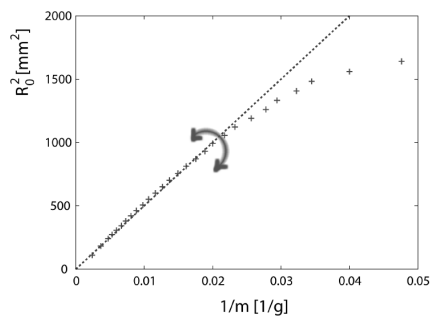
Elméleti megfontolások alapján a benyomott fólia alakja elegendően nagy összenyomás esetén jól közelíthető stadion alakkal, mely két R_0 sugarú félkörből és két egyenes szakaszból áll. Ilyenkor az R_0 sugar és az F nyomóerő között az

$$(*) \quad R_0^2 = \frac{l\kappa\pi}{2F}$$

összefüggés áll fenn, ahol κ a fólia anyagára jellemző hajlítási szilárdság, l pedig a henger magassága. Látható, hogy az elrendezés nem ideális rugóként viselkedik.

A versenyzőknek össze kellett állítaniuk a kísérleti elrendezést, és több fólia esetén is meg mérték az F erőt a prés $2R_0$ szélességének függvényében. Fel kellett ismerjenek bizonyos szimmetriákat, továbbá feladatuk volt az egyensúlyi helyzetek megkeresése és ezek stabilitás-vizsgálata. Ezután alkalmasan transzformált adatok ábrázolásával igazolni kellett, hogy a (*) formula valóban helyes egy bizonyos $R_0 < R_c$ tartományban. Végül meg kellett határozni az $\frac{R_0}{R_c}$ értéket, a κ hajlítási szilárdságot, és abból adott összefüggés alapján a fólia Young-modulusát.

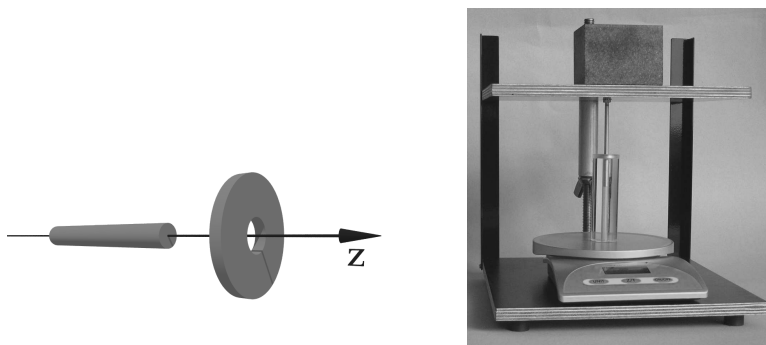
Kiértékeléskor nagyon fontos, hogy olyan transzformált mennyiségeket ábrázoljunk a grafikonon, melyek között lineáris kapcsolat van. Például ábrázolhatjuk R_0^2 -et a mérleg által mutatott $m = F/g$ tömeg reciprokanak függvényében. A 2. ábrán egy valódi mérésből származó grafikon látható. A nyíl jelzi a stadion közelítés érvényességi tartományát. Jól láthatóan ebben a tartományban a transzformált adatok között egyenes arányosság áll fenn.



2. ábra. Az $x = 1/m = g/F$, $y = R_0^2$ mennyiségek ábrázolásával kapott grafikon

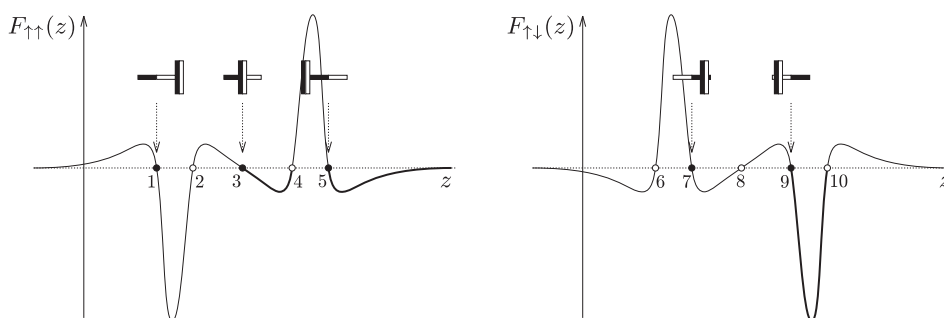
2. feladat. Mágnesek közötti erők, stabilitásvizsgálat, szimmetriák

Ebben a feladatban a versenyzők egy hosszú rúd-mágnes és egy gyűrű alakú mágnes közti erőt mérték a mágnesek közti távolság függvényében. Fel kellett ismerjenek bizonyos szimmetriákat, továbbá feladatuk volt az egyensúlyi helyzetek megkeresése és ezek stabilitásának vizsgálata. A gyűrű alakú mágnes egy átlátszó műanyagcső végére volt ragasztva. A rúd-mágneset ebbe a csőbe kellett bedugni, ez biztosította, hogy a két mágnes tengelye mindig egy egyenesbe essék (3. ábra). Az erőt az előző mérésnél is használt digitális mérlegre szerelt présel mérték.



3. ábra. A két mágnes elvi rajza, és elhelyezkedésük a présben

A megoldást nehezítette, hogy a rúd-mágnesre csak a felfelé irányban ható erőt lehetett mérni, hiszen a prés csak tolni tud, húzni nem. Persze ha a rúd-mágnes polaritását megfordítjuk, akkor az erő iránya is ellenkezőjére vált, így lehet felvenni a teljes görbét. A 4. ábrán látható a mágnesek között mért F erő a rúd-mágnes z helyzetének függvényében párhuzamos, illetve ellentétes polaritás esetén. (A két mágnes középpontjának távolsága z .)



4. ábra. A két mágnes között mérhető F erő a z távolság függvényében párhuzamos, illetve ellentétes polaritás esetén

A görbék meglepően bonyolultak, annak ellenére, hogy több érdekes szimmetriát is mutatnak! Mindkét függvény páratlan függvény, és az egyik mágnes polaritásának megváltoztatásakor az erő is előjelet vált, azaz:

$$F_{\uparrow\uparrow}(z) = -F_{\uparrow\uparrow}(-z), \quad F_{\uparrow\downarrow}(z) = -F_{\uparrow\downarrow}(-z), \quad F_{\uparrow\uparrow}(z) = -F_{\uparrow\downarrow}(z).$$

A görbék zérushelyei felelnek meg az egyensúlyi helyzeteknek. Az egyensúly stabil, ha az erő az egyensúlyból való kitéréssel ellentétes irányú, azaz ha a görbe negatív meredekséggel metszi az z tengelyt. Ellenkező esetben az egyensúlyi helyzet instabil. Az ábrán teli körök jelölik a stabil, üres körök az instabil egyensúlyi helyzeteket.

A versenyzőknek az egyensúlyi helyzeteket kellett megkeresniük és osztályozniuk, a szimmetriákat kellett megállapítaniuk, és az $F(z)$ grafikonok egyes szakaszait kimérve, a szimmetriák figyelembevételével kvalitatíven fel kellett rajzolniuk a teljes grafikonok menetét.