

A 41. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia elméleti feladatai¹

1. feladat. Tükörtlöltés egy fémtárgyban

Bevezetés – Tükörtlöltés módszer. Helyezzünk el egy q ponttöltést egy R sugarú, földelt fémgömb közelében (lásd az 1.(a) ábrát). A ponttöltés hatására a gömbön felületi töltéeloszlás jön létre. A felületi töltéeloszlás által keltett elektromos tér és a potenciál kiszámítása rendkívül nehéz feladat. Azonban az úgynevezett tükörtlöltés módszerrel a számítások lényegesen leegyszerűsíthetők. A módszer lényege az, hogy a gömbön lévő töltéeloszlás által keltett elektromos mező és potenciál leírható egyetlen, a gömb belsejében lévő q' ponttöltés terével és potenciáljával (ezt a tényt nem kell bizonyítanod).

Megjegyzés: Ennek a q' tükörtlöltésnek az elektromos tere csak a gömbön kívül (beleértve a felületét is) feleltethető meg a felületi töltéeloszlás által keltett elektromos térnek és potenciálnak.



1. ábra. (a) A q ponttöltés egy földelt fémgömb közelében. (b) A gömbön létrejövő töltés terét megfeleltethetjük a q' tükörtlöltés elektromos terének

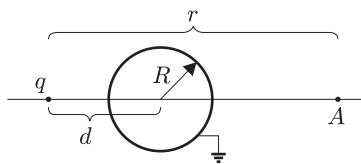
1. Tükörtlöltés. Az elrendezés szimmetriájából következik, hogy a q' ponttöltésnek a q ponttöltést és a gömb középpontját összekötő egyenesen kell lennie (lásd az 1.(b) ábrát).

a) Mekkora a potenciál értéke a gömbön?

b) Fejezd ki a tükörtlöltés q' értékét, valamint a gömb középpontjától számított d' távolságát q , d és R segítségével!

c) Határozd meg a q töltésre ható erő nagyságát! Ez az erő taszító (igen vagy nem)?

2. Elektrosztatikus tér leárnýékolása. Tekintsünk egy q ponttöltést egy R sugarú, földelt fémgömb közelében, a gömb középpontjától d távolságra. Azt vizsgáljuk, hogyan befolyásolja a földelt fémgömb jelenléte az A pontban az elektromos teret. Az A pont a gömb túlsó oldalán helyezkedik el (lásd a 2. ábrát). Az A pont a q ponttöltést és a gömb középpontját összekötő egyenesen található; a q ponttöltéstől mért távolsága r .



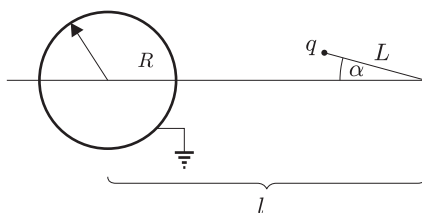
2. ábra. Az A pontban a földelt gömb részlegesen leárnýékolja az elektromos teret

a) Határozd meg az A pontban az elektromos térerősség vektort!

b) Határozd meg az elektromos térerősség képletét nagyon nagy távolság ($r \gg d$) esetén, felhasználva, hogy $(1 + a)^{-2} \approx 1 - 2a$, ha $a \ll 1$.

c) A d távolságra nézve milyen feltételnek kell teljesülni ahhoz, hogy a földelt fémgömb teljesen leárnýékolja a q töltés terét, vagyis az A pontban az elektromos térerősség pontosan nulla legyen?

3. Rezgések a földelt fémgömb elektromos terében. Egy L hosszúságú fonál segítségével a földelt fémgömb közelében „felfüggesztünk” egy q ponttöltést, melynek tömege m . A fonál másik végét egy falhoz rögzítjük. A fal elektrosztatikus hatásait hanyagoljuk el. A ponttöltés matematikai ingaként viselkedik (lásd a 3. ábrát). A fonálnak a falhoz rögzített vége l távolságra van a gömb középpontjától. Tegyük fel, hogy a gravitáció elhanyagolható.



3. ábra. Egy ingaként viselkedő ponttöltés a földelt fémgömb közelében

¹ A hivatalos megoldást és a mérési feladatot a KöMaL októberi számában ismertetjük. A feladatok kidolgozására 5 óra állt rendelkezésre.

- a) Adjuk meg a q ponttöltésre ható elektromos erő nagyságát egy adott α szög esetén, és jelezzük ennek az erőnek az irányát egy jól áttekinthető ábrán!
- b) Határozzuk meg ennek az erőnek a fonálra merőleges összetevőjét a következő tagok függvényében: l , L , R , q és α .
- c) Adjuk meg az inga kis rezgéseinek frekvenciáját!

4. A rendszer elektrosztatikus energiája. Elektromos töltéeloszlások esetén a rendszer elektrosztatikus energiája fontos adat. A mi esetünkben (lásd az 1.(a) ábrát), elektrosztatikus kölcsönhatás jön létre a külső q töltés és a gömbön kialakuló töltések között, valamint létezik elektrosztatikus kölcsönhatás magán a gömbön lévő töltések között is. A q töltés, valamint a gömb R sugara, továbbá a d távolság segítségével határozzuk meg a következő elektrosztatikus energiákat:

- a) a q töltés és a gömbön lévő töltések közötti kölcsönhatás elektrosztatikus energiáját;
- b) a gömbön lévő töltések közötti kölcsönhatás elektrosztatikus energiáját;
- c) a rendszer teljes kölcsönhatási elektrosztatikus energiáját.

Útmutatás: Ez a feladat többféleképpen is megoldható!

- (1) Az egyik módszer esetén a következő integrált használhatod:

$$\int_d^\infty \frac{x dx}{(x^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}.$$

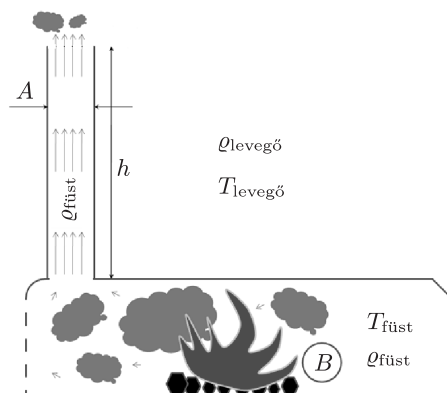
(2) Egy másik módszer esetén felhasználhatod azt a tényt, hogy N ponttöltésből álló rendszer teljes elektrosztatikus energiája az összes töltéspárra vonatkozó energiák összege:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|},$$

ahol a töltéseket q_i jelöli, és ezek az $\vec{r}_i$, ($i = 1, \dots, N$) pontokban helyezkednek el.

2. feladat. Kéményfizika

Bevezetés. Egy kazánból a légnemű égéstermék (füst, gáz) A keresztmetszetű, h magasságú kéményen keresztül jut ki a $T_{\text{levegő}}$ hőmérsékletű légkörbe (lásd 4. ábra). A kazán égésterének, valamint az égés során keletkezett füstnek a hőmérséklete $T_{\text{füst}}$. A kazánban időegység alatt keletkezett légnemű égéstermék térfogata B .



4. ábra. A $T_{\text{füst}}$ hőmérsékletű kazán és a h magasságú kémény

A következő közelítésekkel éljünk:

- A kazánban a gázok áramlási sebessége elhanyagolhatóan kicsi.
- Az égéstermék (füst) sűrűsége megegyezik az ugyanolyan nyomású és hőmérsékletű levegő sűrűségével, továbbá a kazánban levő gáz ideálisnak tekinthető.
- A külső levegő nyomása a hidrosztatikus nyomás törvénye szerint változik a magasság függvényében; a külső levegő sűrűségének magasságtól való függése elhanyagolható.
- Az égéstermék áramlása megfelel a Bernoulli-törvénynek, mely szerint a következő összeg:

$$\frac{1}{2} \rho v^2(z) + \rho g z + p(z) = \text{állandó}$$

az áramlási tér minden pontjában. A képletben ρ az égéstermék sűrűsége, $v(z)$ az áramlás sebessége, $p(z)$ pedig a nyomás z magasságban.

- Az égéstermék sűrűségének változása a kémény teljes hosszában elhanyagolható.

1. részfeladat.

a) Mekkora az a minimális magasság, mely mellett a kémény hatékonyan működik, azaz az összes keletkező égéstermék képes a légkörbe kijuttatni? Az eredményt B , A , $T_{\text{levegő}}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ és $\Delta T = T_{\text{füst}} - T_{\text{levegő}}$ függvényében add meg!

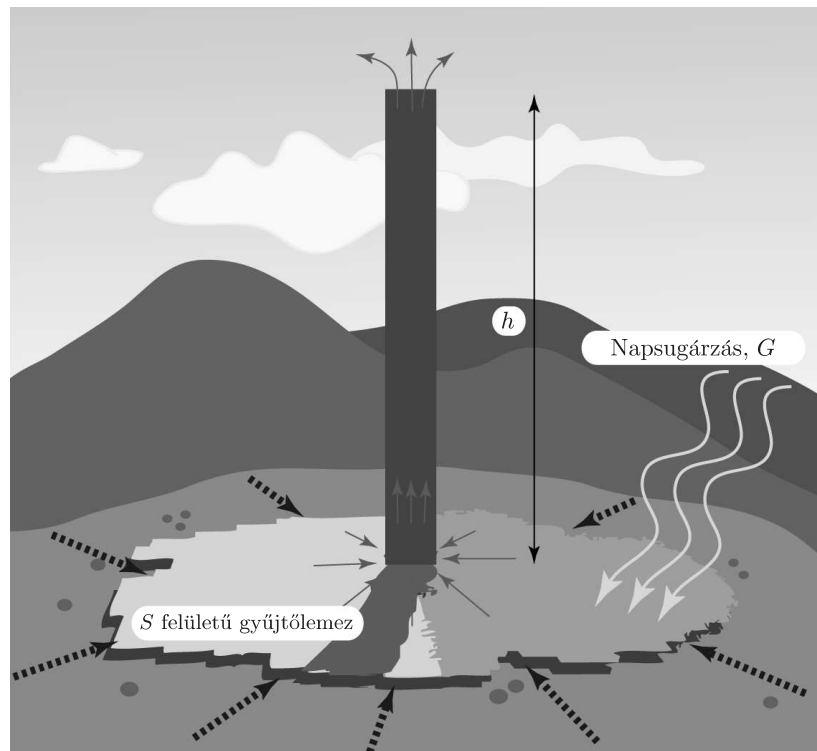
Fontos: a összes további kérdés megválaszolásánál tételezd fel, hogy a kémény magassága megegyezik ezzel a minimális mérettel.

b) Tegyük föl, hogy két pontosan azonos kazánhoz, azonos célra két kéményt építenek. A kémények keresztmetszete megegyezik, de különböző földrajzi helyre tervezik őket; az egyiket hideg éghajlatra, ahol a levegő átlagos hőmérséklete -30°C , a másikat pedig meleg vidékre, ahol a levegő átlaghőmérséklete 30°C . Mindkét esetben a kazán belső hőmérséklete 400°C . A hidegebb helyen levő kémény minimális magassága 100 m -nek adódik. Milyen magas a másik kémény?

c) Mekkora a kéményben áramló gáz sebessége? Készíts vázlatos grafikont az áramló gáz sebességéről a magasság függvényében, feltételezve, hogy a kémény keresztmetszete nem változik a magassággal. Jelöld meg a grafikonon azt a magasságot, ahol az égéstermék belép a kéménybe!

d) Hogyan változik a kéményben az égéstermék (gáz) nyomása a magasság függvényében?

Naperőmű. A kéményben áramló gáz energiájának hasznosításával naperőművet (napkéményt) lehet létrehozni. Az elrendezést az 5. ábra szemlélteti. A Nap felfelemelegíti az S felületű gyűjtőlemez alatt elhelyezkedő levegőt. A gyűjtőlemez szélénél a levegő szabadon áramolhat be a lemez alá. Miközben a felfelemelegített levegő a kéményen keresztül felfelé távozik (vékony, folytonos nyílak), hideg levegő áramlik a gyűjtőlemez alá a széleken (vastag, pontozott nyílak), és így a napkéményben folytonos levegőáramlás alakul ki. Az áramló levegő egy turbinát hajt meg a kéményben, amely elektromos energiát termel. A napsugárzás időegységre és vízszintes területegységre vonatkoztatott energiáját jelölje G . Tegyük föl, hogy a gyűjtőlemezre jutó összes napsugárzás a lemez alatt levő levegő melegítésére fordítódik. Jelölje a levegő (egységnyi tömegre vonatkoztatott) fajhőjét c , és hanyagoljuk el c hőmérsékletfüggését. A napkémény hatásfokát a kéményben áramló gáz mozgási energiájának és a gyűjtőlemez alatt levő levegő által elnyelt besugárzási energiának a hányadosaként értelmezzük.



5. ábra. A napkémény felépítése

2. részfeladat.

a) Mennyi a napkémény hatásfoka?

b) Grafikonon ábrázold a hatásfoknak a kémény magasságától való függését!

A Manzanares-ben működő napkémény. Az első napkémény a spanyolországi Manzanares közelében épült. A kémény magassága 195 m , sugara 5 m . A gyűjtőlemez 244 m átmérőjű körlemez. A tipikus működési körülmények mellett a napkéményben levő levegő fajhője $1012 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, a forró levegő sűrűsége megközelítőleg $0,9 \text{ kg/m}^3$, a külső levegő átlaghőmérséklete pedig $T_{\text{levegő}} = 295 \text{ K}$ Manzanares-ben. Az egységnyi vízszintes felületre eső napsugárzás intenzitása nappal, egy átlagos napsütéses napon 150 W/m^2 .

3. részfeladat.

- Mennyi a Manzanares-ben épült napkémény hatásfoka? Eredményedet számszerűen is add meg!
- Mekkora teljesítménnyel működik a Manzanares-ben épült napkémény?
- Mennyi energiát állít elő a Manzanares-ben épült napkémény egy átlagos napsütéses napon?

4. részfeladat.

a) Határozd meg, mennyivel emelkedik a napkéményben a kémény torkolatánál belépő (meleg) levegő hőmérséklete a külső (hideg) levegő hőmérsékletéhez képest? Add meg az általános formulát, majd értékeld ki a Manzanares-ben működő napkémény adataival!

b) Hány kilogramm/szekundum a Manzanares-ben működő napkéményben hozama, vagyis mennyi az időegység alatt átáramló levegő tömege?

3. feladat. Egyszerű atommagmodell

Bevezetés. Bár az atommagok kvantummechanikai objektumok, az alaptulajdonságaikra (mint például sugarukra, kötési energiájukra) vonatkozó fenomenologikus törvények néhány egyszerű feltételezésből megkaphatók:

- az atommagok nukleonokból (protonokból és neutronokból) állnak;
- a nukleonokat összetartó erős kölcsönhatás nagyon rövid hatótávolságú (csak szomszédos nukleonok között működik);
- egy adott atommagban a protonok száma (Z) közel azonos a neutronok számával (N), azaz $Z \approx N \approx A/2$, ahol A az összes nukleon száma (tömegszám), ha $A \gg 1$.

Fontos: A következő 1–4. részfeladat mindegyikében használd ezeket a feltételezéseket! Az 5. részfeladat az előzőektől függetlenül megoldható.

1. Az atommag, mint szorosan illeszkedő nukleonok rendszere. Egy egyszerű modellben az atommag úgy tekinthető, mint egy gömb, mely egymáshoz szorosan illeszkedő nukleonokból áll (6.(a) ábra), ahol a nukleonok $r_N = 0,85$ fm sugarú merev golyók ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$). A nukleáris kölcsönhatás csak az egymással közvetlenül érintkező két nukleon között működik. Az atommag teljes V térfogata nagyobb, mint az őt alkotó nukleonok AV_N össztérfogata, ahol $V_N = \frac{4}{3}r_N^3\pi$. Az $f = AV_N/V$ arányt *kitöltési tényezőjének* hívják, és azt adja meg, hogy az atommag térfogatának hányadrészét tölti ki nukleáris anyag.

a) Határozd meg az f kitöltési tényezőt, feltételezve, hogy a nukleonok egyszerű köbös (simple cubic, SC) rácsba rendeződnek. Az egyszerű köbös rácsban a nukleonok egy végtelen kockarács csúcspontjaiban találhatóak. (Lásd 6.(b) ábra.)



6. ábra. (a) Egy atommag, mint szorosan illeszkedő nukleonokból álló gömb. (b) Az egyszerű köbös (simple cubic, SC) térkitöltés

Fontos: Minden további kérdésben tételezd fel, hogy az atommagok kitöltési tényezője megegyezik a most kiszámolt értékkel! Ha nem tudtad megoldani az előző kérdést, akkor a továbbiakban számolj az $f = 1/2$ értékkel!

b) Becsüld meg az A tömegszámú (A nukleont tartalmazó) atommag átlagos ρ_m tömegsűrűségét, ρ_c töltéssűrűségét valamint R sugarát! Egy nukleon átlagos tömege $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

2. Az atommag kötési energiája (térfogati és felületi tagok). Az atommag kötési energiája az őt alkotó különálló nukleonokra való szétbontásához szükséges energia. A kötési energia legjelentősebb része a szomszédos nukleonok között működő vonzó nukleáris kölcsönhatásból származik. Az atommag belsejében található nukleonokhoz rendelhető kötési energijárulék $a_V = 15,8 \text{ MeV}$ ($1 \text{ MeV} = 1,602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$). Az atommag felületén levő nukleonok járuléka közelítőleg ennek a fele, $a_V/2$. Fejezd ki az A tömegszámú atommag E_b kötési energiáját A , a_V és f segítségével, figyelembe véve a felületi korrekciót is!

3. A kötési energia elektrosztatikus (Coulomb) tagja. Ismert, hogy az R sugarú, Q_0 elektromos töltéssel térfogatában egyenletesen feltöltött gömb elektrosztatikus energiája:

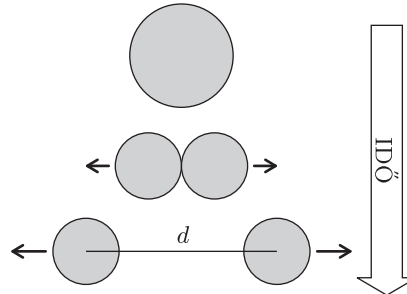
$$U_c = \frac{3Q_0^2}{20\pi\epsilon_0 R}, \quad \text{ahol} \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}.$$

a) A fenti formula felhasználásával határozd meg az atommag elektrosztatikus energiáját! Az atommagban található protonok saját magukra nem hatnak (Coulomb-erővel), csak a többi protonra. Ezt a tényt úgy vehetjük figyelembe,

hogy a végső formulában a $Z^2 \rightarrow Z(Z - 1)$ átírást hajtjuk végre. Ebben és a következő feladatokban használd ezt a korrekciót!

b) Add meg a kötési energia teljes képletét, mely tartalmazza a fő (térfogati) tagot, valamint a felületi- és Coulomb-korrekciót!

4. Nehéz atommagok bomlása. A bomlás olyan nukleáris folyamat, mely során egy atommag könnyebb alkotóelemekre (kisebb atommagokra) esik szét. Tegyük föl, hogy egy A tömegszámú atommag két azonos részre bomlik, a 7. ábrán látható módon.

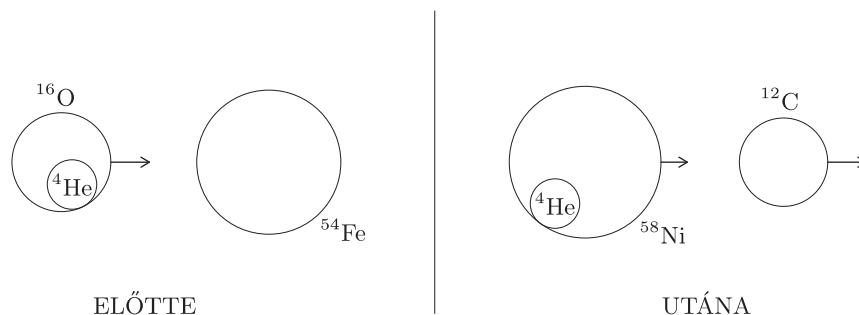


7. ábra. A nukleáris bomlás sematikus rajza a modellünk szerint

a) Határozd meg a bomlástermékek együttes mozgási energiáját (E_{kin} -t), feltételezve, hogy a két könnyebb atommag középpontjának távolsága $d \geq 2R(A/2)$, ahol $R(A/2)$ a bomlás során képződött atommagok sugara! Kezdetben a bomló atommag nyugalomban volt.

b) Feltételezve, hogy $d = 2R(A/2)$, határozd meg az előző, a) pontban E_{kin} -re kapott kifejezés értékét $A = 100, 150, 200$ és 250 esetén! (Eredményeidet MeV egységben add meg!) A fenti modell alapján becsüld meg, hogy mely A tömegszám esetén lehetséges bomlás!

5. Transzfer reakciók. a) A magfizikában az atommagok és a magreakciók energiáit tömeg egységekből szokás megadni. Például egy nem mozgó (nulla sebességű), ámde az alapállapothoz képest E_{exc} energiával gerjesztett atommag tömege $m = m_0 + E_{\text{exc}}/c^2$, ahol m_0 a mag nyugalmi tömege alapállapotban. Az $^{16}\text{O} + ^{54}\text{Fe} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^{58}\text{Ni}$ magreakció az egyik példája az úgynevezett „transzfer reakciónak”, amikor az egyik atommag egy része („klaszter”) bejut a másik atommagba (lásd a 8. ábrát). Esetünkben az átkerülő rész egy α részecske (^4He -klaszter). A transzfer reakciók akkor játszódnak le maximális valószínűséggel, ha a kirepülő reakciótermék (esetünkben a ^{12}C mag) sebessége nagyság és irány szerint megegyezik a becsapódó lövedék mag (esetünkben az ^{16}O) sebességével. A ^{54}Fe céltárgy kezdetben nyugalomban van. A reakcióban a ^{58}Ni magasan gerjesztett állapotba kerül. Határozd meg ennek az állapotnak a gerjesztési energiáját (és fejezd ki MeV egységekből), ha a lövedék ^{16}O mag mozgási energiája 50 MeV. A fény sebessége $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.



8. ábra. A transzfer reakció vázlata

1.	$M(^{16}\text{O})$	15,994 91 a.m.u.
2.	$M(^{54}\text{Fe})$	53,939 62 a.m.u.
3.	$M(^{12}\text{C})$	12,000 00 a.m.u.
4.	$M(^{58}\text{Ni})$	57,935 35 a.m.u.

1. táblázat. A reakciótermékek nyugalmi tömegei alapállapotukban atomi tömegegységben (a.m.u.), ahol $1 \text{ a.m.u.} = 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

b) Az a) részben tárgyalt, gerjesztett állapotú ^{58}Ni mag alapállapotba jut („legerjesztődik”), miközben kibocsát egy gamma-fotont a mozgásának irányában. Tárgyaljuk ezt a bomlást abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyben a ^{58}Ni

mag nyugalomban van, és határozzuk meg a ^{58}Ni mag visszalökődési energiáját (vagyis azt a mozgási energiát, amivel a ^{58}Ni mag rendelkezik a foton kibocsátása után). Mekkora a foton energiája ebben a vonatkoztatási rendszerben? Mekkora a foton energiája a laboratóriumi kordináta rendszerben (azaz mekkora foton energiát mérne az a detektor, amelyet a ^{58}Ni mag mozgásának irányába állítanának be)?