

# Összetett rezgések

## I. rész

### Bevezetés

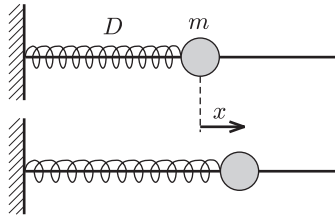
A középiskolában általában nincs lehetőség a rezgőmozgások mélyebb tárgyalására, legtöbbször csak az egyszerű harmonikus rezgés ismertetésére kerül sor. Ennek oka nem csak az idő szűkében rejlik, hanem abban is, hogy a bonyolultabb *összetett rezgések* szokásos tárgyalása a középiskolai tananyagban jócskán túlnyúló, lineáris algebrai ismereteket igényel (mátrixok sajátértékproblémája). A környezetünkben túlnyomórészt ezekkel az összetett rezgésekkel találkozunk: a pohár koccanása, a tortazselé remegése, a kristályokban a rácсионok nyüzsgése mind-mind összetett rezgés, amelyek nem érthetők meg pusztán az egyszerű harmonikus rezgőmozgásra vonatkozó ismeretekkel.

Ez a kétrészes cikk kísérletet tesz arra, hogy nehéz matematikai apparátus nélkül, egyszerű példákon keresztül, középiskolások számára is érthető módon tárgyalja az összetett rezgéseket és a témához kapcsolódó olyan érdekes jelenségeket, mint a csatolt ingák rezgése vagy a lebegés.

### Az egyszerű harmonikus rezgőmozgás

Elevenítsük fel először a harmonikus rezgésre vonatkozó ismereteket a következő egyszerű példán keresztül!

**1. példa.** *Függőleges falból vízszintesen egy egyenes, hosszú, merev huzal áll ki. A huzalra  $m$  tömegű gyöngy van felfűzve. A gyöngyöt  $D$  direkciós erejű húzó-nyomó rugó kapcsolja a falhoz (1. ábra). A kezdetben álló gyöngyöt  $v_0$  kezdeti sebességgel elindítjuk. Írjuk le a mozgást! (A gyöngy súrlódásmentesen csúszhat a huzalon.)*



1. ábra

**Megoldás.** A gyöngyre ható függőleges irányú erők kiegyenlítik egymást, vízszintesen pedig csak a rugóerő hat, így a mechanika alapegyenlete az

$$ma(t) = -Dx(t)$$

alakot ölti, ahol  $x(t)$  a gyöngy egyensúlyi helyzetétől mért (időtől függő) kitérése,  $a(t)$  a gyorsulása, a negatív előjel pedig arra utal, hogy a gyorsulás mindig a kitéréssel ellentétes irányú. Az egyszerűség kedvéért a fizikai mennyiségek változási gyorsaságát<sup>1</sup> jelöljük a fizikai mennyiség fölé írt ponttal, azaz legyen a gyöngy sebessége  $v(t) = \dot{x}(t)$ , a gyorsulása pedig  $a(t) = \ddot{x}(t)$ ! A mozgásegyenletet átrendezve az

$$(1) \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$$

alakú egyenletre jutunk, ahol bevezettük az  $\omega = \sqrt{D/m}$  jelölést. Az (1) egyenlet egy másodrendű differenciálegyenlet a gyöngy kitérésének  $x(t)$  időfüggésére, melyet szerencsére nem kell tudnunk megoldani, hiszen a megoldása a jól ismert

$$(2) \quad x(t) = \mathcal{A} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

formát ölti, a gyöngy sebességét pedig a deriválással (vagy a mechanikai energiamegmaradásból) kapható

$$(3) \quad \dot{x}(t) = \mathcal{A}\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

kifejezés adja meg, ahol  $\omega$  a rezgés fent bevezetett körfrekvenciája,  $\mathcal{A}$  a rezgés amplitúdója (legnagyobb kitérése),  $\varphi_0$  pedig a rezgés kezdőfázisa. Utóbbi kettő a kezdeti feltételektől függ, vagyis a gyöngy kezdeti kitéréséből és sebességéből kiszámítható.

A konkrét példánkban kezdetben a gyöngy az egyensúlyi helyzetben volt ( $x(0) = 0$ ), ezért a  $\varphi_0$  kezdőfázis értéke zérus. A kezdősebesség nagysága  $\dot{x}(0) = \mathcal{A}\omega = v_0$  volt, így a mozgás amplitúdójának nagysága  $\mathcal{A} = v_0/\omega$ . A feladatbeli kezdőfeltételek esetén tehát a gyöngyszem mozgását az

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

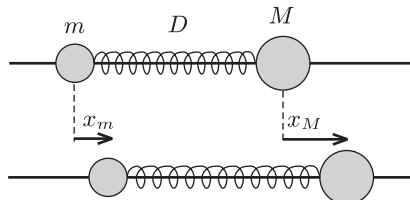
összefüggés írja le.

<sup>1</sup>Idő szerinti deriváltját.

## Két, rugóval összekötött tömegpont mozgása

Az első példánál egy fokkal bonyolultabb a rugóval összekötött két tömegpont mozgása, amely jól ismert a fizika-versenyekre járók körében. A probléma szokásos megoldási módja a következő: A tömegközéppont egyenletesen haladó mozgását leválasztjuk úgy, hogy beleülünk a tömegközépponttal együtt mozgó koordinátarendszerbe. Itt a rugónak a rendszer tömegközéppontjával egybeeső pontja áll, ezért az egyes testek úgy mozognak, mintha a tömegközéppont által kettéosztott rugó hozzájuk közelebb eső darabja mozgatná őket. Ezzel a gondolattal meghatározható a rezgés körfrekvenciája. Itt azonban egy másik, a bonyolultabb rendszerek esetén is járható utat választunk a megoldáshoz.

**2. példa.** Egy egyenes, hosszú, vízszintes, merev huzalra  $m$  és  $M$  tömegű gyöngyök vannak felfűzve. A gyöngyöket  $D$  direkciós erejű húzó-nyomó rugó kapcsolja össze (2. ábra). A kezdetben álló rendszert az  $m$  tömegű gyöngynek adott  $v_0$  kezdeti sebességgel elindítjuk. Írjuk le a mozgást! (A gyöngyök súrlódásmentesen csúszhatnak a huzalon.)



2. ábra

**Megoldás.** Jelöljük az  $m$  tömegű gyöngy kezdeti helyzettől mért elmozdulását  $x_m$ -mel, az  $M$  tömegű gyöngy elmozdulását pedig  $x_M$ -mel! Az egyes testekre vízszintesen csak a rugóerő hat, így a gyöngyök mozgásegyenletei:

$$(4) \quad \begin{aligned} m\ddot{x}_m &= D(x_M - x_m), \\ M\ddot{x}_M &= -D(x_M - x_m). \end{aligned}$$

Ezek szembeötlően nem az (1) egyenlethez hasonló kifejezések, azaz a testek mozgása nem egyszerűen harmonikus rezgőmozgás. A további vizsgálódás kedvéért osszuk el az egyenletet a tömegekkel, majd adjuk hozzá az első egyenlethez a második  $\alpha$ -szorosát (ahol  $\alpha$  valós szám)! Az eredmény:

$$(5) \quad \ddot{x}_m + \alpha\ddot{x}_M = -\left(\frac{D}{m} - \alpha\frac{D}{M}\right)(x_m - x_M).$$

Vezessük be az eredeti koordináták lineáris kombinációjaként<sup>2</sup> képzett

$$y(t) = x_m(t) + \alpha x_M(t)$$

mennyiséget! A változási gyorsaság képzési szabályából következik, hogy az  $y(t)$  mennyiség „gyorsulása” a gyöngyök gyorsulásaival hasonlóan egyszerű kapcsolatban van:

$$\ddot{y}(t) = \ddot{x}_m(t) + \alpha\ddot{x}_M(t).$$

Az új  $y(t)$  változó bevezetésével észrevehetjük, hogy az (5) egyenlet  $\alpha = M/m$  vagy  $-1$  esetén

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 y(t)$$

alakúra hozható, ahol

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \alpha\frac{D}{M}}.$$

Tehát a két lehetséges lineárkombináció és a hozzájuk tartozó körfrekvencia:

$$(6) \quad \begin{aligned} y_1(t) &= x_m(t) + \frac{M}{m}x_M(t), & \omega_1 &= 0, \\ y_2(t) &= x_m(t) - x_M(t), & \omega_2 &= \sqrt{D\frac{m+M}{mM}}. \end{aligned}$$

Az  $y_1(t)$  lineárkombináció egy zérus frekvenciájú rezgés egyenletét elégíti ki, vagyis  $\ddot{y}_1(t) = 0$ . Ez éppen az egyenletes (tehát nulla gyorsulású) mozgás egyenlete, aminek megoldása

$$y_1(t) = y_1(0) + \mathcal{V}t,$$

<sup>2</sup> Az  $x_1, x_2, x_3, \dots$  mennyiségek lineáris kombinációján a  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \dots$  alakú összeget értjük, ahol  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  (most) valós számok.

ahol  $y_1(0)$ -t és  $\mathcal{V}$ -t a kezdeti feltételek határozzák meg. Az  $y_2(t)$  lineárkombináció egy  $\omega_2$  körfrekvenciájú harmonikus rezgőmozgás egyenletét elégíti ki, így  $y_2(t)$  és  $\dot{y}_2(t)$  időfüggése a (2) és (3) összefüggéseknek megfelelően

$$\begin{aligned}y_2(t) &= \mathcal{A} \sin(\omega_2 t + \varphi_0), \\ \dot{y}_2(t) &= \mathcal{A} \omega_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_0),\end{aligned}$$

ahol az amplitúdót és a kezdőfázist most is a kezdeti feltételek határozzák meg.

Vajon milyen kapcsolatban vannak az  $y_1(t)$  és  $y_2(t)$  lineárkombinációk az  $m$  és  $M$  tömegű gyöngyök mozgásával? Nincs más dolgunk, mint  $y_1(t)$  és  $y_2(t)$  ismeretében megoldani a (6) egyenletrendszert  $x_m(t)$ -re és  $x_M(t)$ -re. Így a gyöngyök mozgását leíró egyenletek:

$$(7) \quad \begin{aligned}x_m(t) &= \frac{m}{m+M} y_1(t) + \frac{M}{m+M} y_2(t), \\ x_M(t) &= \frac{m}{m+M} y_1(t) - \frac{m}{m+M} y_2(t).\end{aligned}$$

További kérdés, hogy van-e fizikai jelentése az  $y_1(t)$  és  $y_2(t)$  lineárkombinációknak? A (7) egyenletekből leolvasható, hogy

- ha  $y_1(t) \neq 0$  és  $y_2(t) = 0$ , a két test kitérése minden időpillanatban megegyezik, így a testek rezgés nélkül tisztán haladó mozgást végeznek. Az  $y_1(t)$  tehát a testek egyenletes haladó mozgását írja le.
- ha  $y_2(t) \neq 0$  és  $y_1(t) = 0$ , a két test kitérése minden időpillanatban ellentétes irányú, nagyságuk pedig fordítottan arányos a gyöngyök tömegével, így ebben az esetben a rendszer tömegközéppontja áll.  $y_2(t)$  a gyöngyök egymáshoz viszonyított rezgőmozgását írja le.

Most térjünk vissza a konkrét példánk megoldásához! Az általános megoldásokat illesztünk kell a kezdeti feltételekhez. Kezdetben mindkét gyöngy elmozdulása zérus, tehát  $x_m(0) = x_M(0) = 0$ , azaz a rezgés kezdőfázisa nulla. Az indítás pillanatában az  $m$  tömegű test sebessége  $v_0$ , az  $M$  tömegű test pedig áll, így  $\dot{x}_m(0) = v_0$  és  $\dot{x}_M(0) = 0$ . (6) felhasználásával  $\dot{y}_1(0) = \mathcal{V} = v_0$  és  $\dot{y}_2(0) = 0$  adódik. Az  $y_1(t)$  és  $y_2(t)$  lineárkombinációk időfüggése tehát:

$$(8) \quad \begin{aligned}y_1(t) &= v_0 t, \\ y_2(t) &= \frac{v_0}{\omega_2} \sin(\omega_2 t).\end{aligned}$$

Ezeket beírva a (7) egyenletekbe:

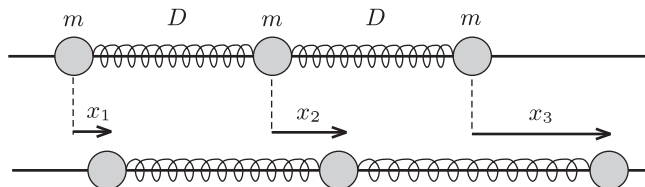
$$\begin{aligned}x_m &= \frac{m}{m+M} v_0 t + \frac{M}{m+M} \frac{v_0}{\omega_2} \sin(\omega_2 t), \\ x_M &= \frac{m}{m+M} v_0 t - \frac{m}{m+M} \frac{v_0}{\omega_2} \sin(\omega_2 t).\end{aligned}$$

Végül tehát előzetes várakozásainknak megfelelő eredményt kaptunk: a testek olyan összetett mozgást végeznek, melyben a rendszer tömegközéppontja (az impulzusmegmaradás értelmében)  $v_0 m / (m + M)$  sebességgel egyenletesen halad, valamint a testek  $\omega_2$  körfrekvenciával rezegnek a tömegközéppont körül. Ha az  $m/M$  tömegarány nagyon kicsi, akkor az  $M$  tömegű gyöngy lényegében állónak tekinthető és az  $m$  tömegű test mozgására visszakapjuk az 1. példa eredményeit.

### Három, rugóval összekötött tömegpont mozgása

Az előbb megismert módszert alkalmazzuk most három testből és két rugóból álló rendszer rezgéseinek leírására. Legyen a konkrét feladat a következő:

**3. példa.** Egy egyenes, hosszú, vízszintes, merev huzalra három azonos  $m$  tömegű gyöngy van felfűzve. A középső gyöngyöt egy-egy  $D$  direkciós erejű, egyforma húzó-nyomó rugó kapcsolja a két szélsőhöz (3. ábra). A kezdetben álló rendszert a bal szélső gyöngynek adott  $v_0$  kezdeti sebességgel elindítjuk. Írjuk le a mozgást! (A gyöngyök súrlódásmentesen csúszhatnak a huzalon.)



3. ábra

**Megoldás.** Jelöljük a bal szélső gyöngy elmozdulását  $x_1$ -gyel, a középsőét  $x_2$ -vel, a jobb szélsőét pedig  $x_3$ -mal! Az egyes rugók megnyúlása  $x_2 - x_1$  és  $x_3 - x_2$ , így a három gyöngyre a mozgásegyenletek:

$$(9) \quad \begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= D(x_2 - x_1), \\ m\ddot{x}_2 &= -D(x_2 - x_1) + D(x_3 - x_2), \\ m\ddot{x}_3 &= -D(x_3 - x_2). \end{aligned}$$

Bevezetve az  $\omega_0 = \sqrt{D/m}$  jelölést és rendezve:

$$(10) \quad \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \omega_0^2(x_2 - x_1), \\ \ddot{x}_2 &= \omega_0^2(x_1 - 2x_2 + x_3), \\ \ddot{x}_3 &= \omega_0^2(x_2 - x_3). \end{aligned}$$

Ezek az egyenletek (akárcsak a két testből álló rendszernél) most sem hasonlítanak a szokásos harmonikus rezgés mozgásegyenletére, de látni fogjuk, hogy az  $x_1$ ,  $x_2$  és  $x_3$  koordinátákból megfelelő lineáris kombinációval most is kifejezhető olyan  $y(t)$  mennyiség (nem is egy, hanem három), melynek időbeli változását a harmonikus rezgés (1) egyenlete írja le. Keressük tehát azokat az  $\alpha$  és  $\beta$  együtthatókat, melyekkel az

$$(11) \quad y(t) = x_1(t) + \alpha x_2(t) + \beta x_3(t)$$

módon az eredeti koordinátákból képzett lineáris kombináció időfüggése harmonikus, azaz teljesíti az

$$(12) \quad \ddot{y}(t) = -\omega^2 y(t)$$

egyenletet. Ehhez szorozzuk meg a (10) összefüggések közül a másodikat  $\alpha$ -val, a harmadikat pedig  $\beta$ -val, majd adjuk össze az egyenleteket!

$$\ddot{x}_1 + \alpha\ddot{x}_2 + \beta\ddot{x}_3 = \omega_0^2((x_2 - x_1) + \alpha(x_1 - 2x_2 + x_3) + \beta(x_2 - x_3)).$$

Rendezve:

$$\ddot{x}_1 + \alpha\ddot{x}_2 + \beta\ddot{x}_3 = \omega_0^2((\alpha - 1)x_1 + (1 - 2\alpha + \beta)x_2 + (\alpha - \beta)x_3).$$

Látható, hogy ha  $\alpha = \beta = 1$ , akkor az egyenlet jobb oldala eltűnik, azaz a koordináták

$$y_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

lineárkombinációja egy  $\omega_1 = 0$  körfrekvenciájú  $\ddot{y}_1(t) = 0$  alakú „rezgési egyenletet” elégít ki. Ez azt jelenti, hogy az  $y_1(t)$  mennyiség az idő függvényében egyenletesen változik, azaz

$$y_1(t) = y_1(0) + \mathcal{V}t,$$

ahol  $\mathcal{V}$  egy sebesség dimenziójú állandó (lényegében a testek kezdősebességeinek összege). Hasonlóan a 2. példa megoldásához, látni fogjuk, hogy ez a lineárkombináció írja le a rendszer tömegközéppontjának mozgását.

A továbbiakban tegyük fel, hogy  $\alpha \neq 1$ ! Azért, hogy a (12) egyenlettel azonos alakú időfüggést kapjunk, végezzük el a következő kiemelést:

$$(13) \quad \underbrace{\ddot{x}_1 + \alpha\ddot{x}_2 + \beta\ddot{x}_3}_{\ddot{y}(t)} = -\underbrace{(1 - \alpha)\omega_0^2}_{\omega^2} \underbrace{\left(x_1 + \frac{1 - 2\alpha + \beta}{\alpha - 1}x_2 + \frac{\alpha - \beta}{\alpha - 1}x_3\right)}_{y(t)}.$$

Innen leolvasható, hogy a harmonikus időfüggés teljesüléséhez az együtthatók között a következő összefüggéseknek kell fennállniuk:

$$(14) \quad \alpha = \frac{1 - 2\alpha + \beta}{\alpha - 1}, \quad \beta = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - 1},$$

a körfrekvencia pedig (13) szerint

$$(15) \quad \omega = \omega_0\sqrt{1 - \alpha}.$$

A (14) egyenletrendszer így is írható:

$$(\alpha + 2)(\alpha - 1) = \beta - 1, \quad \alpha(\beta - 1) = 0.$$

Ennek két megoldása van:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0, & \beta &= -1; \\ \alpha &= -2, & \beta &= 1.\end{aligned}$$

A korábban talált  $y_1(t)$  mellett megkaptuk tehát az  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  koordináták további két olyan lineárkombinációját, amelyek az időben (12) szerint harmonikusan változnak. Tehát a három független lineárkombináció (és a nekik megfelelő rezgési frekvencia) a következő:

$$(16) \quad \begin{aligned}y_1(t) &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t), & \omega_1 &= 0, \\ y_2(t) &= x_1(t) - x_3(t), & \omega_2 &= \omega_0, \\ y_3(t) &= x_1(t) - 2x_2(t) + x_3(t), & \omega_3 &= \sqrt{3}\omega_0.\end{aligned}$$

Ezek időfüggése pedig:

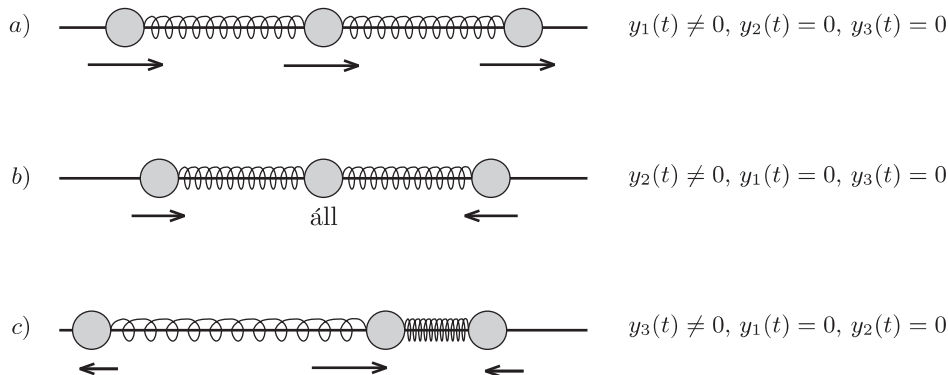
$$(17) \quad \begin{aligned}y_1(t) &= y_1(0) + \mathcal{V}t, \\ y_2(t) &= \mathcal{A}_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \\ y_3(t) &= \mathcal{A}_3 \sin(\omega_3 t + \varphi_3).\end{aligned}$$

Az  $y_1(0)$  és  $\mathcal{V}$  értéke, az  $\mathcal{A}_2$ ,  $\mathcal{A}_3$  amplitúdók és a  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  kezdőfázisok a kezdeti feltételekből (azaz a kiinduló koordinátákból és sebességekből) határozhatók meg. A feladatunk most is az  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  és  $x_3(t)$  kitérés-idő függvények meghatározása. A (16) egyenlet alapján ezek kifejezhetők az ismert időfüggésű  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$  mennyiségekkel:

$$(18) \quad \begin{aligned}x_1(t) &= \frac{1}{3}y_1(t) + \frac{1}{2}y_2(t) + \frac{1}{6}y_3(t), \\ x_2(t) &= \frac{1}{3}y_1(t) - \frac{1}{3}y_3(t), \\ x_3(t) &= \frac{1}{3}y_1(t) - \frac{1}{2}y_2(t) + \frac{1}{6}y_3(t).\end{aligned}$$

A két testből álló rendszerhez hasonlóan könnyen kideríthetjük, hogy mi az  $y_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) lineárkombinációk fizikai jelentése (4. ábra). A (18) összefüggésből látható, hogy ha

- $y_1(t) \neq 0$  és  $y_2(t) = y_3(t) = 0$ , akkor  $x_1(t) = x_2(t) = x_3(t)$ , azaz mindhárom test kitérése megegyezik: ilyenkor a rendszer nem rezeg, ez a lineárkombináció a tisztán haladó mozgást írja le.
- $y_2(t) \neq 0$  és  $y_1(t) = y_3(t) = 0$ , akkor  $x_1(t) = -x_3(t)$  és  $x_2(t) = 0$ , vagyis az  $y_2(t)$  lineárkombináció olyan „lélegző” mozgásformát ír le, melyben a középső test áll, a két szélső test kitérése pedig minden időpillanatban ellentétes, egyenlő nagyságú. A rendszer tömegközéppontja ilyenkor áll.
- $y_3(t) \neq 0$  és  $y_1(t) = y_2(t) = 0$ , akkor  $x_1(t) = x_3(t) = -\frac{1}{2}x_2(t)$ , ami olyan „tili-toli” mozgásformát jelent, hogy a két szélső test kitérése minden időpillanatban megegyezik, a középső pedig velük ellentétesen, kétszer akkora kitéréssel mozog. A tömegközéppont ebben az esetben sem mozog.



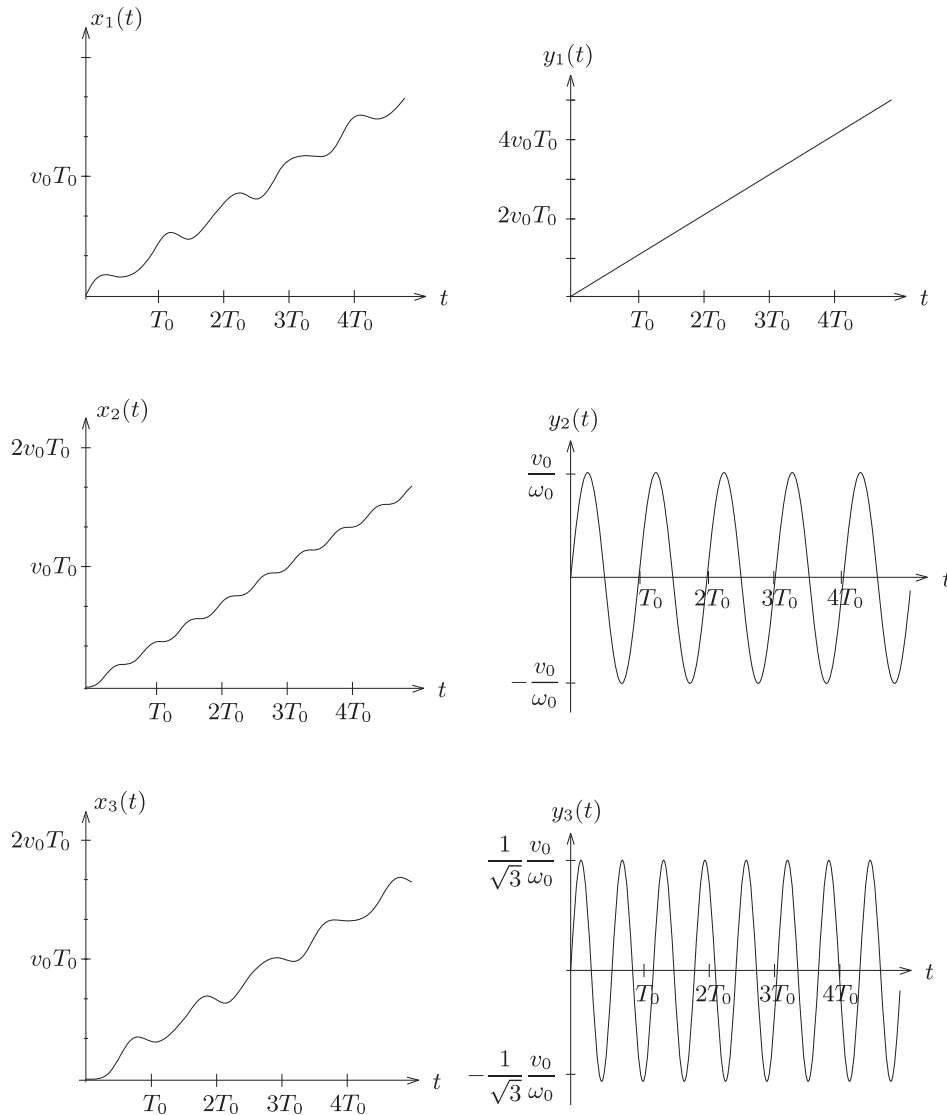
4. ábra. Az  $y_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) lineárkombinációk fizikai jelentésének szemléltetése:  $y_1(t)$  az egyenletes mozgást (a),  $y_2(t)$  a lüktető mozgást (b),  $y_3(t)$  pedig a „tili-toli” mozgást (c) írja le. A rendszer mozgása e három mozgásforma kezdeti feltételektől függő, megfelelő arányú szuperpozíciójaként (keverékeként) állítható elő

Hátra van még a konkrét példánk megoldása, azaz a (18) általános megoldások illesztése a kezdeti feltételekhez. Kezdetben mindhárom test egyensúlyi helyzetben volt, így  $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$ . Csak a bal oldali testet

lőktük meg  $v_0$  kezdősebességgel, így  $\dot{x}_1(0) = v_0$ ,  $\dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0$ . Ezekből és a (16) egyenletekből következik, hogy  $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0$  (azaz  $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$ ) és  $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = \dot{y}_3(0) = v_0$ . A (17) összefüggéseket figyelembe véve  $\mathcal{V} = v_0$ ,  $\mathcal{A}_2\omega_2 = v_0$ ,  $\mathcal{A}_3\omega_3 = v_0$ . A testek mozgását leíró egyenletek tehát:

$$(19) \quad \begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{3}v_0t + \frac{1}{2}\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0t) + \frac{1}{6}\frac{v_0}{\sqrt{3}\omega_0}\sin(\sqrt{3}\omega_0t), \\ x_2(t) &= \frac{1}{3}v_0t - \frac{1}{3}\frac{v_0}{\sqrt{3}\omega_0}\sin(\sqrt{3}\omega_0t), \\ x_3(t) &= \frac{1}{3}v_0t - \frac{1}{2}\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0t) + \frac{1}{6}\frac{v_0}{\sqrt{3}\omega_0}\sin(\sqrt{3}\omega_0t). \end{aligned}$$

Az egyes gyöngyök elmozdulását ábrázolhatjuk az idő függvényében, ahogy azt az 5. ábra mutatja az  $y_i(t)$  lineárkombinációk időfüggésével együtt.



5. ábra. *Első oszlop:* A három test  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) kitérése az idő függvényében.

*Második oszlop:* az  $x_i(t)$  kitérésekből képzett  $y_i(t)$  lineárkombinációk.

Az időt  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  egységekben mértük

### Általános következtetések

Az előzőekben láttuk, hogy a két és három testből álló rendszerek egyenes mentén történő (egydimenziós) rezgéseinél az egyes testek  $x_i(t)$  koordinátáinak időfüggését leíró egyenletek általában nem hasonlítanak az egyszerű harmonikus rezgőmozgás egyenletére, de a koordinátákból megfelelő lineárkombináció képzésével előállíthatók olyan  $y_i(t)$  mennyiségek, melyek már az időben harmonikusan (egy jellemző körfrekvenciával tisztán szinuszosan) változnak.

Az  $y_i(t)$  lineárkombinációk pontos időfüggése a rendszer kezdőfeltételeinek (kezdeti kitérések és sebességek) ismeretében meghatározható, majd abból az egyes testek elmozdulásainak  $x_i(t)$  értéke is megállapítható.

Az eljárás általánosítható nagyobb rendszerekre is. Álljon a rendszerünk  $N$  tetszőleges tömegű pontszerű testből, melyek egy egyenes mentén mozoghatnak, és a kössék össze a testeket (akár különböző erősségű) rugók! Ha az  $i$ -edik test kitérését  $x_i(t)$ -vel jelöljük, a rendszer mozgása a következő recepttel írható le:

1. Felírjuk a rendszer összes elemének mozgásegyenletét, azaz minden  $i = 1, 2, \dots, N$ -re egy

$$\ddot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^N \eta_j x_j(t)$$

alakú egyenletet (itt az  $\eta_j$  együtthatókat a rugók direkciós ereje és a testek tömegei határozzák meg).

2. Megkeressük azokat az  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  együtthatókat, melyekkel a testek kitéréseiből képzett

$$y(t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j x_j(t)$$

lineárkombinációk a harmonikus rezgőmozgás

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 y(t)$$

egyenletét elégítik ki alkalmas  $\omega$  körfrekvenciával. Általában  $N$  különböző ilyen  $y_i(t)$  lineárkombinációt fogunk találni (ahol  $i = 1, 2, \dots, N$ ). Ezekből egy kombinációhoz mindig zérus körfrekvencia tartozik, ez írja le az egyenletesen haladó mozgást.

3. Az  $y_i(t)$  lineárkombinációkra vonatkozó rezgési egyenleteket megoldjuk és a megoldásokat illesztjük a kezdeti feltételekhez (kezdősebességek és kezdeti koordináták).
4. Végül az egyes testek  $x_i(t)$  koordinátáit kifejezzük az  $y_i(t)$  mennyiségekkel.

Az  $y_i(t)$  mennyiségeket, vagy általánosabban fogalmazva a rendszer eredeti koordinátáinak olyan lineárkombinációit, amelyek időfüggése tisztán harmonikus (azaz az időnek egyetlen, adott körfrekvenciájú szinuszos függvényével írható le), *normálkoordinátáknak*, a nekik megfelelő  $\omega_i$  körfrekvenciákat pedig a rendszer *saját(kör)frekvenciáinak* nevezzük. Az olyan mozgásformákat, melyekben egyetlen normálkoordináta kivételével mindegyik zérus, *sajátrezgésnek* vagy *normálrezgésnek* nevezzük. Például a 3. példában szereplő gyöngyök az egyenletes, a lüktető és a tili-toli mozgásban sajátrezgéseket végeznek. Minden sajátrezgéshez tartozik egy amplitúdó-konfiguráció (a 3. példában a három sajátrezgéshez az amplitúdók  $1 : 1 : 1$ ,  $1 : 0 : 1$  és  $1 : (-2) : 1$  aránya tartozott), ezeket *normálmódusoknak* nevezzük.

**Vigh Máté**