

I. rész

1. Egy kocka élének hossza centiméterben mérve egész szám. A kocka felületét pirosra festettük, majd az oldallapjaival párhuzamos vágásokkal 1 cm élű kiskockákra daraboltuk.

a) Hány centiméter volt a kocka éle, ha a pontosan egy festett lapú kiskockák száma megegyezik a festetlen kiskockák számával?

b) Hány olyan különböző méretű kocka létezik, amelyből 0,5 és 0,6 közé eső valószínűséggel választhatunk ki festetlen kiskockát? (A kiskockák kiválasztásának valószínűségét vegyük egyenlőnek.) (11 pont)

2. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes szám esetén

a) az $n^5 - 5n^3 + 4n + 1$ szám 1-re végződik;

b) $5 \mid 2^{4n+1} + 3$. (12 pont)

3. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$\log_{x+3}(x^2 - 9x - 10) \leq \log_{x+3} 12.$$

(14 pont)

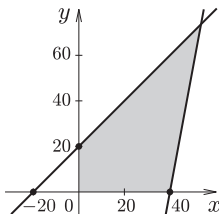
4. a) Egy növekvő számtani sorozat első, negyedik és tizedik tagja egy mértani sorozat első három tagja. A számtani sorozat nyolcadik tagja 10. Határozzuk meg a mértani sorozat első tagját.

b) A 3, 4, 5, 6 számjegyekből képezzünk véletlenszerűen egy csupa különböző számjegyből álló négyjegyű számot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kapott szám 4-gyel osztható? (14 pont)

II. rész

5. Egy derékszögű háromszög alakú saroktelekre téglalap alapterületű házat tervezünk úgy, hogy annak két oldala az utcával párhuzamos legyen. A telek két merőleges oldalának hossza 50 m és 30 m. Hogyan válasszuk meg a ház oldalainak hosszát, ha a lehető legnagyobb alapterületű házat szeretnénk megtervezni? (16 pont)

6. A derékszögű koordinátarendszer első síknegyedéből az *ábrán* látható két egyenes egy 2010 egység területű négyszöget vág le.



a) Határozzuk meg a két egyenes metszéspontjának koordinátáit.

b) Írjuk fel az egyenesek egyenletét. (16 pont)

7. Két számot választunk véletlenszerűen a $[0; 1]$ számközben. Mi a valószínűsége annak, hogy összegük 1-nél, szorzatuk pedig $\frac{4}{25}$ -nél kisebb lesz? (16 pont)

8. Egy forgáskúp és egy henger alaplapja közös. A kúp csúcsa a henger fedőlapjának középpontja. Határozzuk meg a kúp tengelyének és alkotójának hajlásszögét, ha a henger és a kúp felszínének aránya 7 : 4. (16 pont)

9. A $[0; 2]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x^3 + 1$ és $g(x) = (x + 1)^2$ függvények grafikonját megforgatjuk az x tengely körül.

a) Számítsuk ki az így kapott forgástestek alap- és fedőlapjának területét.

b) Számítsuk ki a két test térfogatát. (16 pont)