[1]

3. Szép sudoku megoldások

Célunk, hogy $\mathcal{N}$ geometriai tulajdonságait felhasználva leírjuk a szép sudoku megoldásokat.

Definíció. *Az $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ és $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ $\mathcal{N}$-beli elemek Hamming-távolsága, $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ azon $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ indexek száma, melyekre $x_i \neq y_i$ teljesül.*

Az így mért eltérést azért nevezik távolságnak, mert rendelkezik a geometriából ismert „szokásos” távolság legfontosabb tulajdonságaival. Például igaz a háromszög-egyenlőtlenség, azaz tetszőleges $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ vektorok Hamming-távolságára

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z}) \geq d(\mathbf{x},\mathbf{z}).$$

A Hamming-távolságot persze nemcsak 4 hosszú vektorok esetén lehet értelmezni. Erről részletesen olvashatunk a lapunk 2007. májusi számában megjelent [2] cikkben, vagy a [3] könyv 13. fejezetében.

Tétel. *Szép megoldás esetén bármely két ugyanazon számjegyet tartalmazó mezőhöz tartozó vektor Hamming-távolsága pontosan 3.*

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy két ilyen mező távolsága legalább 3. Tegyük fel, hogy két mezőben ugyanaz a számjegy áll, a mezők távolsága pedig legfeljebb 2. Ez azt jelenti, hogy a két mezőhöz tartozó vektoroknak van két azonos koordinátájuk. Ez a két koordináta hat különböző párban fordulhat elő. Bármelyik párt is adjuk meg, az egyértelműen meghatároz egy sort (x_1 és x_2), vagy oszlopot (x_3 és x_4), vagy törött sort (x_2 és x_3), vagy törött oszlopot (x_1 és x_4), vagy kis négyzetet (x_1 és x_3), vagy pozíciót (x_2 és x_4). Vagyis az egyezés ellentmond a szép megoldás definíciójának.

Nézzünk most 9 olyan mezőt, melyekben ugyanaz a számjegy áll. A mezőknek megfelelő 9 vektorból $9 \times 8 = 72$ rendezett pár készíthető. Ezek páronkénti távolságainak összege az előzőek szerint legalább $72 \times 3 = 216$.

Ez a távolságösszeg az egyes koordinátákban fellépő eltérések összegéből adódik. Vizsgáljuk meg a vektorok első koordinátáit. Legyen az első koordináták közt e_0 darab 0, e_1 darab 1 és e_2 darab 2. Ekkor $e_0 + e_1 + e_2 = 9$, továbbá az első koordináták hozzájárulása a távolságösszeghez:

$$\begin{aligned} e_0(e_1 + e_2) + e_1(e_0 + e_2) + e_2(e_0 + e_1) &= e_0(9 - e_0) + e_1(9 - e_1) + e_2(9 - e_2) = \\ &= 9 \cdot (e_0 + e_1 + e_2) - (e_0^2 + e_1^2 + e_2^2) = 81 - (e_0^2 + e_1^2 + e_2^2). \end{aligned}$$

Viszont a számtani és a négyzetes közép közti egyenlőtlenség szerint

$$\sqrt{\frac{e_0^2 + e_1^2 + e_2^2}{3}} \geq \frac{e_0 + e_1 + e_2}{3} = 3, \tag{1}$$

azaz

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 \geq 27.$$

Tehát az első koordináták eltéréseinek összege legfeljebb $81 - 27 = 54$. Ugyanezeket az egyenlőtlenségeket nyilván felírhatjuk a második, harmadik és negyedik koordinátákra is. Vagyis a távolságok összege legfeljebb $4 \times 54 = 216$.

Ez csak úgy lehet, ha a távolságösszeg pontosan 216, azaz bármely két vektor távolsága éppen 3. $\square$

Nevezzük *jó halmaznak* az $\mathcal{N}$ olyan 9 elemű részhalmazait, melyekben bármely két elem Hamming-távolsága pontosan 3.

Következmény. *Bármely jó halmaz 9 vektora közt minden $i = 1, 2, 3, 4$ és $j = 0, 1, 2$ esetén pontosan 3 olyan van, melynek az i-edik koordinátája j.*

Bizonyítás. Jó halmaz esetén az előző tétel bizonyításában szereplő (1) egyenlőtlenségben egyenlőség áll, ezért $e_0 = e_1 = e_2 = 3$. Továbbá, az ennek megfelelő, a többi koordinátára vonatkozó egyenlőtlenségekben is egyenlőségnek kell teljesülnie, vagyis a 9 vektor minden koordinátájában 3-3 darab 0, 1 és 2 fordul elő. $\square$

Feladat. *Mutassuk meg, hogy legfeljebb 9 $\mathcal{N}$-beli vektor adható meg úgy, hogy közülük bármely kettő Hamming-távolsága legalább 3.*

A továbbiakban célunk a jó halmazok leírása.

Tétel. *$\mathcal{C}$ pontosan akkor jó halmaz, ha bármely $\boldsymbol{x}$-re $\mathcal{C} + \boldsymbol{x}$ is jó halmaz.*

Bizonyítás. Bármely $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ vektorok esetén

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = d(\mathbf{y} + \mathbf{x}, \mathbf{z} + \mathbf{x})$$

[1] A cikk elkészítését az NK 67867 és a K 81310 számú OTKA pályázat támogatta.

amiből azonnal adódik az állítás. $\square$

Tételünkből következik, hogy minden jó halmaznak van olyan eltoltja, amely tartalmazza a $\mathbf{0}$ vektort. Tehát a továbbiakban elegendő az ilyen tulajdonságú jó halmazokat vizsgálnunk.

Tétel. *Ha egy jó halmazban benne vannak az egymástól különböző $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ vektorok, akkor a $2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ vektor is benne van.*

Bizonyítás. Mivel modulo 3 számolunk, azért

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}+2(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathbf{0}.$$

Tudjuk, hogy $d(\mathbf{x},\mathbf{y})=3$. Tehát $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ pontosan egy koordinátában egyezik meg. Feltehetjük, hogy $x_1=y_1=a$. A jó halmazban még pontosan egy olyan $\mathbf{z}$ vektor van, melyre $z_1=a$ teljesül. Mivel $d(\mathbf{x},\mathbf{z})=d(\mathbf{y},\mathbf{z})=3$, azért $i=2,3,4$ esetén az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ vektorok i-edik koordinátái páronként különbözőek, azaz $\{x_i,y_i,z_i\}=\{0,1,2\}$. Ezért $x_i+y_i+z_i=0+1+2=0$. S mivel $x_1+y_1+z_1=a+a+a=0$, azért $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}=\mathbf{0}$, tehát

$$\mathbf{z}=-(\mathbf{x}+\mathbf{y})=2(\mathbf{x}+\mathbf{y}). \quad \square$$

Tétel. *Ha a $\mathcal{C}$ jó halmazban benne van $\boldsymbol{0}$, valamint a lineárisan független $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok, akkor $\mathcal{C}$ egy sík, pontosabban*

$$\mathcal{C}=\mathcal{S}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{0}}.$$

Bizonyítás. Az előző tételt $\mathbf{x}=\mathbf{a}$ és $\mathbf{y}=\mathbf{b}$, $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ és $\mathbf{y}=\mathbf{a}$ valamint $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ és $\mathbf{y}=\mathbf{b}$ esetén alkalmazva kapjuk, hogy $\mathcal{C}$ tartalmazza a $2(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $2\mathbf{a}$ és $2\mathbf{b}$ vektorokat. Mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan függetlenek, ezért $\mathbf{a}\neq 2\mathbf{b}\neq 2\mathbf{a}\neq\mathbf{b}$. Tehát az előző tételt alkalmazhatjuk $\mathbf{x}=\mathbf{a}$ és $\mathbf{y}=2\mathbf{b}$, $\mathbf{x}=\mathbf{b}$ és $\mathbf{y}=2\mathbf{a}$ valamint $\mathbf{x}=2\mathbf{a}$ és $\mathbf{y}=2\mathbf{b}$ választással is. Ezekből kapjuk, hogy $\mathcal{C}$ tartalmazza a $2(\mathbf{a}+2\mathbf{b})=2\mathbf{a}+\mathbf{b}$, a $2(\mathbf{b}+2\mathbf{a})=2\mathbf{b}+\mathbf{a}$ és a $2(2\mathbf{a}+2\mathbf{b})=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektorokat is. $\square$

Ezek után már meg tudjuk adni az összes jó halmazt.

Tétel. *Legyenek $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ lineárisan független vektorok. Ha teljesül, hogy $d(\boldsymbol{0},\boldsymbol{a})=d(\boldsymbol{0},\boldsymbol{b})=d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=3$, akkor $\mathcal{S}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{0}}$ jó halmaz.*

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy $\mathcal{S}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{0}}$ bármely két különböző elemének Hamming-távolsága pontosan 3. Mivel $d(\mathbf{x},\mathbf{y})=d(\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{0})$, azért elég azt megmutatnunk, hogy $\mathcal{S}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{0}}$ minden $\mathbf{0}$-tól különböző elemének pontosan 3 nemnulla koordinátája van.

Legyen $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ és $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3,b_4)$. Mivel $d(\mathbf{0},\mathbf{a})=d(\mathbf{0},\mathbf{b})=3$, ezért $\mathbf{a}$-nak is és $\mathbf{b}$-nek is pontosan egy koordinátája 0. Feltehetjük, hogy $a_1=0$. Ekkor $b_1\neq 0$, mert ha $b_1=0$ lenne, akkor $d(\mathbf{a},\mathbf{b})=3$ miatt $i=2,3,4$ esetén $a_i\neq b_i$ lenne, s mivel ezen koordináták egyike sem 0, azért $\{a_i,b_i\}=\{1,2\}$ is teljesülne. Ekkor viszont $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{0}$, azaz $\mathbf{b}=2\mathbf{a}$ lenne, ami ellentmond a feltételeinknek.

Tehát $b_1\neq 0$. Feltehetjük, hogy $\mathbf{b}$ egyetlen 0 koordinátája b_2. Mivel $d(\mathbf{a},\mathbf{b})=3$ és $a_1\neq b_1$ valamint $a_2\neq b_2$, azért az (a_3,b_3) és (a_4,b_4) párok közül az egyik két egyező, a másik pedig két különböző koordinátából áll. Továbbá tudjuk, hogy ezen koordináták egyike sem 0. Ezért feltehető, hogy $a_3=b_3$ és $\{a_4,b_4\}=\{1,2\}$, azaz $b_4=2a_4$. Ekkor minden $\mathbf{c}\in\mathcal{S}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{0}}$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbf{c}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}&=(\alpha a_1+\beta b_1,\alpha a_2+\beta b_2,\alpha a_3+\beta b_3,\alpha a_4+\beta b_4)=\\&=\big(\beta b_1,\alpha a_2,(\alpha+\beta)a_3,(\alpha+2\beta)a_4\big).\end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy $\mathbf{c}$-nek pontosan egy koordinátája 0. Ha $\alpha=0$, akkor $\beta\neq 0$. Tehát ekkor csak $c_2=0$. Ugyanígy kapjuk, hogy $\beta=0$ esetén csak $c_1=0$. Ha $\alpha\neq 0$ és $\beta\neq 0$, akkor $c_1\neq 0$ és $c_2\neq 0$ nyilván teljesül. Ha továbbá $\alpha=\beta$, akkor

$$c_3=(\alpha+\beta)a_3=2\alpha a_3\neq 0,$$

mert $a_3\neq 0$. Viszont $c_4=(\alpha+2\beta)a_4=3\alpha a_4=0$. Ha pedig $\alpha\neq\beta$, akkor $\beta=2\alpha$, tehát $c_3=(\alpha+\beta)a_3=3\alpha a_3=0$, viszont $c_4=(\alpha+2\beta)a_4=\alpha a_4\neq 0$. $\square$

Következmény. *A $\boldsymbol{0}$ vektort tartalmazó jó halmazok pontosan azok az $\mathcal{S}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{0}}$ síkok, melyekre teljesül, hogy $d(\boldsymbol{0},\boldsymbol{a})=d(\boldsymbol{0},\boldsymbol{b})=d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=3$.*

Tétel. *A $\boldsymbol{0}$ vektort tartalmazó jó halmazok száma* 8.

Bizonyítás. A jó halmaz pontosan 3 olyan vektort tartalmaz, melyek első koordinátája 0, ezek egyike a $\mathbf{0}$. A másik két ilyen vektor második koordinátái 0-tól is és egymástól is különböznek, ezért egyikük második koordinátája 1. Legyen ez a vektor $\mathbf{a}$. Ugyanígy kapjuk, hogy van a halmazban egy olyan $\mathbf{b}$ vektor, melyre $b_1=1$ és $b_2=0$. Tehát

$$\mathbf{a}=(0,1,a_3,a_4) \qquad \text{és} \qquad \mathbf{b}=(1,0,b_3,b_4),$$

ahol $d(\mathbf{a},\mathbf{b})=3$ és $a_1\neq b_1$ valamint $a_2\neq b_2$ miatt az (a_3,b_3) és (a_4,b_4) párok közül az egyik két egyező, a másik pedig két különböző, nemnulla koordinátából áll. Ezért az (a_3,a_4) párt $2\cdot 2=4$-féleképp választhatjuk. Ezután b_3-at 2-féleképp választhatjuk, s ez már b_4-et is meghatározza. $\square$

Feladatok. *Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{0}$ vektort tartalmazó 8 jó halmaz közül bármelyiket is választjuk ki, a maradék 7 halmaz közt pontosan 4 olyan van, amelyik az elsőnek választott halmazunkat egyenesben metszi.*

Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{0}$ vektort tartalmazó 8 jó halmaz közül nem lehet kiválasztani 3 halmazt úgy, hogy közülük bármelyik 2 metszete egyenes legyen.

Bármely szép sudoku megoldás esetén az azonos számjegyet tartalmazó mezőknek megfelelő vektorok egy-egy jó halmazt alkotnak. Tehát a szép megoldás nem más, mint az $\mathcal{N}$ négydimenziós tér 81 vektorának beosztása 9 darab páronként diszjunkt jó halmazba. Jelölje $i=1,2,\dots,9$ esetén $\mathcal{S}_i$ azt a jó halmazt, amelyet az i számjegyet tartalmazó mezőknek megfelelő vektorok alkotnak. Láttuk, hogy $\mathcal{S}_i$ minden i-re egy-egy sík. Jelölje $\mathcal{S}_i'$ az $\mathcal{S}_i$-nek azt az eltoltját, amely tartalmazza a $\mathbf{0}$ vektort.

A legegyszerűbben úgy kapunk szép megoldást, ha mindegyik $\mathcal{S}_i$ halmaz ugyanannak a jó halmaznak az eltoltja, azaz az $\mathcal{S}_i'$ halmazok megegyeznek. Először vizsgáljuk meg, hogy két eltolt mikor metszi egymást.

Tétel. *Legyen $\mathcal{C}$ a $\mathbf{0}$ vektort tartalmazó jó halmaz. Ekkor a $\mathcal{C}+\boldsymbol{x}$ és $\mathcal{C}+\boldsymbol{y}$ jó halmazok $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\in\mathcal{C}$ esetén egybeesnek, $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\notin\mathcal{C}$ esetén pedig nincs közös elemük.*

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy ha a két halmaznak van közös eleme, akkor $\mathbf{x}-\mathbf{y}\in\mathcal{C}$ és a két halmaz megegyezik. Tegyük fel, hogy

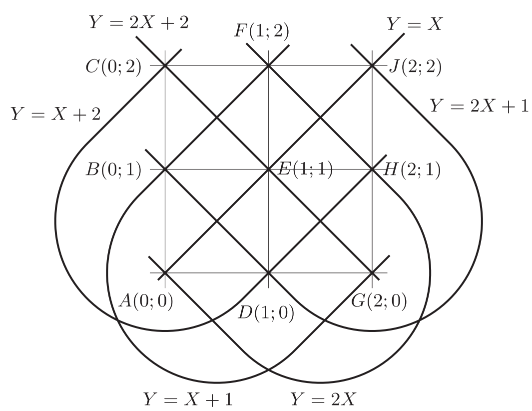
$$\mathbf{z}\in(\mathcal{C}+\mathbf{x})\cap(\mathcal{C}+\mathbf{y}).$$

Ekkor vannak olyan $\mathcal{C}$-beli $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ vektorok, melyekre $\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{c}_1=\mathbf{y}+\mathbf{c}_2$, azaz $\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_1=\mathbf{c}_2+2\mathbf{c}_1$. Vagyis $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ $\mathcal{C}$-beli vektor. Mivel $\mathcal{C}$ sík, azért ebből következik, hogy $\mathcal{C}+(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\mathcal{C}$, tehát

$$\mathcal{C}+\mathbf{y}=\big(\mathcal{C}+(\mathbf{x}-\mathbf{y})\big)+\mathbf{y}=\mathcal{C}+(\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{y})=\mathcal{C}+\mathbf{x},$$

ami épp a bizonyítandó állítás. $\square$

Adott $\mathcal{C}$, a $\mathbf{0}$-t tartalmazó jó halmaz esetén az a 9 vektor melyekkel eltoljuk, lehet pl. $(\alpha,\beta,0,0)$, ahol $\alpha,\beta=0,1,2$. (Ezek éppen az *5. ábrán* látható sík pontjai.) Ezek közül bármelyik két különböző vektor különbségének legfeljebb 2 darab nemnulla koordinátája van, ezért a különbségvektor nem lehet benne semelyik, a $\mathbf{0}$ vektort tartalmazó jó halmazban sem. Mivel összesen 8-féleképp választhatjuk $\mathcal{C}$-t, azért ilyen módon 8 szép megoldást kapunk.



5. ábra

Nézzük most azokat a szép megoldásokat, melyekben a különböző számokhoz tartozó jó halmazok nem ugyanannak a síknak az eltoltjai, azaz az $\mathcal{S}_i'$ halmazok közt van legalább két különböző. Ha $\mathcal{S}_j'\neq\mathcal{S}_k'$, akkor metszetük vagy egy pont (ami épp a $\mathbf{0}$), vagy egy egyenes. Az első esetben az affin tér tulajdonságai miatt azonban $\mathcal{S}_j\cap\mathcal{S}_k$ is egy pont lenne, vagyis a két sík nem lenne diszjunkt. Tehát $\mathcal{S}_j'\cap\mathcal{S}_k'$ egy egyenes. Viszont a $\mathbf{0}$ vektort tartalmazó jó halmazokat leíró tétel utáni feladat szerint ezek közül a halmazok közül nem választható ki 3 úgy, hogy bármelyik kettő metszete egyenes legyen. Vagyis ebben az esetben az $\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2,\dots,\mathcal{S}_9$ síkok két különböző jó halmaz, $\mathcal{S}_j'$ és $\mathcal{S}_k'$ eltoltjai. Az $\mathcal{S}_j'$ és $\mathcal{S}_k'$ síkok meghatároznak egy őket tartalmazó $\mathcal{H}_0$ hipersíkot. Ez a hipersík és két eltoltja, $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ lefedi $\mathcal{N}$-et. Továbbá $\mathcal{S}_j'$ és $\mathcal{S}_k'$ minden eltoltja teljes egészében benne van valamelyik $\mathcal{H}_i$-ben, mert tetszőleges $\mathcal{D},\mathcal{E}$ halmazokra és $\mathbf{x}$ vektorra nyilván igaz, hogy ha $\mathcal{D}\subset\mathcal{E}$, akkor $(\mathcal{D}+\mathbf{x})\subset(\mathcal{E}+\mathbf{x})$. Ezért a $\mathcal{H}_i$ halmazok bármelyike csak ugyanannak a jó halmaznak az eltoltjait tartalmazhatja.

A számolási feladatainkból következik, hogy a $\mathbf{0}$-t tartalmazó 8 jó halmaz bármelyikéhez 4 másikat tudunk választani úgy, hogy metszetük egy egyenes legyen. Így tehát összesen $8\cdot 4=32$ rendezett $(\mathcal{S}'_j,\mathcal{S}'_k)$ párt választhatunk ki. Minden pár esetén feltehetjük, hogy az első tag eltoltjai egy, a második pedig két $\mathcal{H}_i$ típusú hipersíkot fednek le. Ezért minden párhoz 3-3 megoldás tartozik, mert a $\mathcal{H}_i$ hipersíkok közül ki kell választanunk azt az egyet, melyet a pár első tagjának eltoltjaival fedünk le. Tehát ezekből a szép megoldásokból $32 \cdot 3 = 96$ különböző van.

Vagyis a szép sudoku megoldások száma $8 + 96 = 104$. Ez nagyságrendekkel kevesebb, mint az összes megoldás száma, ami 5 472 730 538. S ez a szám is nagyságrendekkel kisebb, mint a 9×9-es latin négyzeteknek a cikk elején említett száma.

Végül még két feladatot adunk.

Feladat. *Töltsük ki a* 6. ábrán *látható sudoku táblát úgy, hogy szép megoldást kapjunk.*

					1	2		
					2			
1								
		2		3				
			1	4				5
					6		7	
								7
				7				
		8						

6. ábra

Feladat. *Mutassuk meg, hogy a páronként ortogonális sudoku megoldások száma legfeljebb* 6.

Hat darab páronként ortogonális sudoku megoldás létezik is, pl. a *7. ábrán* láthatók (a kis téglalapok azonos pozícióiban lévő számok alkotnak egy-egy megoldást).

1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9
1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9
7	4	9	8	5	7	9	6	8	1	7	3	2	8	1	3	9	2	4	1	6	5	2	4	6	3	5
5	6	8	6	4	9	4	5	7	8	9	2	9	7	3	7	8	1	2	3	5	3	1	6	1	2	4
4	7	5	5	8	6	6	9	4	7	1	8	8	2	9	9	3	7	1	4	2	2	5	3	3	6	1
9	8	6	7	9	4	8	7	5	3	2	9	1	3	7	2	1	8	6	5	3	4	6	1	5	4	2
3	2	8	1	3	9	2	1	7	6	5	2	4	6	3	5	4	1	9	8	5	7	9	6	8	7	4
6	9	5	4	7	6	5	8	4	9	3	8	7	1	9	8	2	7	3	6	2	1	4	3	2	5	1
9	5	4	7	6	5	8	4	6	3	8	7	1	9	8	2	7	9	6	2	1	4	3	2	5	1	3
7	2	3	8	3	1	9	1	2	1	5	6	2	6	4	3	4	5	4	8	9	5	9	7	6	7	8
6	8	3	4	9	1	5	7	2	9	2	6	7	3	4	8	1	5	3	5	9	1	6	7	2	4	8
2	4	7	3	5	8	1	6	9	5	7	1	6	8	2	4	9	3	8	1	4	9	2	5	7	3	6
2	3	6	3	1	4	1	2	5	5	6	9	6	4	7	4	5	8	8	9	3	9	7	1	7	8	2
8	5	9	9	6	7	7	4	8	2	8	3	3	9	1	1	7	2	5	2	6	6	3	4	4	1	5
8	6	2	9	4	3	7	5	1	2	9	5	3	7	6	1	8	4	5	3	8	6	1	9	4	2	7
3	7	4	1	8	5	2	9	6	6	1	7	4	2	8	5	3	9	9	4	1	7	5	2	8	6	3
5	9	7	6	7	8	4	8	9	8	3	1	9	1	2	7	2	3	2	6	4	3	4	5	1	5	6
4	3	2	5	1	3	6	2	1	7	6	5	8	4	6	9	5	4	1	9	8	2	7	9	3	8	7

7. ábra

Irodalomjegyzék

[1] Bailey, R., Cameron, P. J. és Connelly, R.: Sudoku, gerechte designs, resolutions, affine space, reguli and Hamming codes, *Amer. Math. Monthly* (2008), 383–404.

[2] Kiss Gy.: Hogyan nyerjünk a TOTÓ-n? *KöMaL,* **57** (2007), 267–273.

[3] Kiss Gy. és Szőnyi T.: *Véges geometriák,* Polygon Kiadó (Szeged, 2001).