I. rész

1. *a) Igazoljuk, hogy* $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[4]{18}$ *és* $\sqrt[4]{50}$ *lehet egy derékszögű háromszög három oldalhosszának mérőszáma.*
b) Igazoljuk, hogy

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \text{és} \qquad \frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{6-3\sqrt{3}}}$$

egyenlő. (*10 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen $a=\sqrt[4]{8}, b=\sqrt[4]{18}$ és $c=\sqrt[4]{50}$. Ekkor $c^2=\sqrt{50}$, $a^2+b^2=\sqrt{8}+\sqrt{18}$.

Mivel $a^2+b^2=\sqrt{8}+\sqrt{18}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}=\sqrt{50}=c^2$, azért a $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[4]{18}$ és $\sqrt[4]{50}$ a Pitagorasz-tétel megfordítása szerint lehet egy derékszögű háromszög három oldalhosszának mérőszáma.

b) Vegyük mindkét szám $4\sqrt{6-3\sqrt{3}}$-szorosát.

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot 4\sqrt{6-3\sqrt{3}}=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sqrt{6-3\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2\left(6-3\sqrt{3}\right)}=$$

$$=2\sqrt{21-12\sqrt{3}}=2\sqrt{\left(2\sqrt{3}-3\right)^2}=2\left(2\sqrt{3}-3\right).$$

$$\frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{6-3\sqrt{3}}}\cdot 4\sqrt{6-3\sqrt{3}}=2\left(2\sqrt{3}-3\right).$$

Ebből következik, hogy az eredeti két szám is egyenlő.

2. *a) Oldjuk meg az egész számok halmazán:* $(5x+60)^2=(-x-192)^2$.
b) Oldjuk meg a valós számok halmazán: $\sqrt{5x+60}=\sqrt{-x-192}$.
c) Oldjuk meg a

$$\sin(5\alpha+60°)=\sin(-\alpha-192°)$$

egyenletet, ha $\alpha\in[-180°;180°]$. (*13 pont*)

Megoldás. *a*) Két eset van: $5x+60=-x-192$ vagy $5x+60=-(-x-192)$. Ezek alapján az egyenlet két megoldása: $x_1=-42$, $x_2=33$.

b) A négyzetgyökök miatt: $5x+60\ge 0$ és $-x-192\ge 0$, azaz $-12\le x$ és $x\le -192$. Ilyen valós x szám nincs, az egyenletnek nincs valós megoldása.

c) Két eset van.

I. eset: $(5x+60°)-(-x-192°)=k_1\cdot 360°$, ahol k_1 tetszőleges egész szám.

$$6x=-252°+k_1\cdot 360°, \qquad x_1=-42°+k_1\cdot 60°.$$

II. eset: $(5x+60°)+(-x-192°)=180°+k_2\cdot 360°$, ahol k_2 tetszőleges egész szám.

$$4x=132°+k_2\cdot 360°, \qquad x_2=33°+k_1\cdot 90°.$$

Az első esetben a k_1 lehetséges értékei: -2, -1, 0, 1, 2, 3. Ekkor a következő szögeket kapjuk: $-162°$, $-102°$, $-42°$, $18°$, $78°$, $138°$.

A második esetben a k_2 lehetséges értékei: -2, -1, 0, 1. Ekkor a következő szögeket kapjuk: $-147°$, $-57°$, $33°$, $123°$.

Az egyenlet megoldásai a megadott intervallumban:

$$-162°,\quad -147°,\quad -102°,\quad -57°,\quad -42°,\quad 18°,\quad 33°,\quad 78°,\quad 123°,\quad 138°.$$

3. *Egy* 32 *fős osztályban a lányok testmagasságátlaga* 165 cm, *a fiúké* 172 cm.
a) Adjuk meg azt a legszűkebb intervallumot, ahová az osztály testmagasságának átlaga eshet.
b) Évközben érkezett az osztályba egy 170 cm *magas lány. A lányok testmagasságátlaga továbbra is egész szám maradt. Hány lány lehetett eredetileg az osztályban?* (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Az osztályban van fiú és lány tanuló is, hiszen beszélhetünk a testmagasságuk átlagáról.

Az osztály testmagasságának átlaga akkor lesz a legkisebb, ha csak egy fiú van. Ekkor az átlag:

$$\frac{31\cdot 165+172}{32}=165{,}21875.$$

Az osztály testmagasságának átlaga akkor lesz a legnagyobb, ha csak egy lány van. Ekkor az átlag:

$$\frac{165 + 31 \cdot 172}{32} = 171{,}78125.$$

Az osztály testmagasságának átlaga a $[165{,}21875; 171{,}78125]$-ba esik, és ennél szűkebb intervallumot nem adhatunk.

b) Eredetileg legyen a lányok száma x. A lányok testmagasságának átlaga az új lány érkezése után:

$$\frac{165x + 170}{x + 1}.$$

Ezt a következő alakban is írhatjuk:

$$\frac{165(x + 1) + 5}{x + 1} = 165 + \frac{5}{x + 1}.$$

Tudjuk, hogy az így kapott szám is egész, ezért $x + 1$ lehetséges értékei: -5, -1, 1, 5, vagyis az x lehetséges értékei: -6, -2, 0, 4. Mivel az x csak pozitív egész szám lehet, azért az egyedüli lehetőség az $x = 4$.

Az osztályban eredetileg csak 4 lány volt.

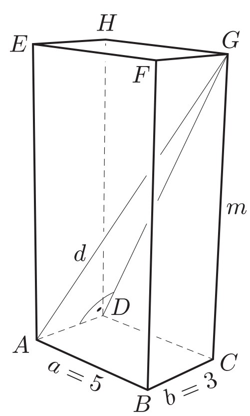
4. *Egy téglalap alapú egyenes hasáb alapéleinek hossza* 3 *és* 5*, testátlója pedig* $\frac{\sqrt{497}}{2}$.

a) *Mekkora szöget zár be a testátló a rövidebb alapéllel?*

b) *Mekkora a test felszíne?*

c) *A feladatban szereplő hasábbal egyenlő magasságú, egyenlő térfogatú négyzetes oszlopot szeretnénk tervezni. Hány százalékkal kell változtatni az alapélek hosszát?* (*14 pont*)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit.



a) Az ADG derékszögű háromszögben az A csúcsnál lévő α hegyesszög nagyságát kell meghatároznunk. Tudjuk, hogy $AD = 3$, $AG = \frac{\sqrt{497}}{2}$. Ekkor

$$\cos\alpha = \frac{3}{\frac{\sqrt{497}}{2}},$$

amiből $\alpha \approx 74{,}4°$.

b) A téglalap alapú egyenes hasáb magasságát még nem ismerjük, legyen ez m. Ez a test egy téglatest, ezért a d testátlója: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + m^2}$. Az ismert szakaszok hosszát behelyettesítve:

$$\frac{\sqrt{497}}{2} = \sqrt{5^2 + 3^2 + m^2}.$$

Ebből kapjuk, hogy $m = \frac{19}{2}$.

A test felszíne:

$$A = 2(ab + am + bm) = 2\left(15 + \frac{95}{2} + \frac{57}{2}\right) = 182.$$

c) Legyen a négyzetes oszlop alapéle x. Mivel a négyzetes oszlop térfogata egyenlő a téglatest térfogatával, azért

$$3 \cdot 5 \cdot \frac{19}{2} = x^2 \cdot \frac{19}{2}.$$

Ez alapján $x = \sqrt{15}$.

Jelölje p és q azt a számot, ahányszorosára az éleket változtatni kell.

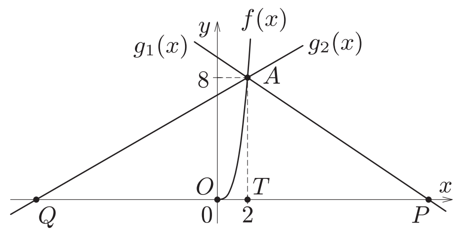
$$p = \frac{\sqrt{15}}{5} \approx 0{,}775, \qquad q = \frac{\sqrt{15}}{3} \approx 1{,}291,$$

így a hosszabb alapélt kb. 22,5%-kal csökkenteni, a rövidebb alapélt pedig kb. 29,1%-kal növelni kell.

II. rész

5. *Az $f(x) = x^3$ a nemnegatív valós és a $g(x) = mx - 2m + 8$ a valós számok halmazán értelmezett függvények (m valós paraméter). A függvények grafikonjai és az x tengely által meghatározott síkidom területe* 2010. *Határozzuk meg az m paraméter értékét.* *(16 pont)*

Megoldás. A $g(x)$ függvény elsőfokú és az m paraméter a meredeksége. Ha $g(x) = m(x-2) + 8$ alakban írjuk a hozzárendelési szabályát, akkor belátható, hogy az $A(2;8)$ koordinátájú pont a függvény grafikonjára minden m esetén illeszkedik. Ez a pont az $f(x)$ függvény képére is illeszkedik. Ezek alapján *vázlatrajzot* készítünk. Az elsőfokú függvény képét két helyzetben is el tudjuk képzelni úgy, hogy a feladat szövegének eleget tegyen. Ezt a rajzunkon $g_1(x)$ és $g_2(x)$ jelzi.



A $g(x)$ és az x metszéspontja: $P(p;0)$ vagy $Q(-q;0)$.
I. eset: Meghatározzuk az OAP síkidom területét.
Az $f(x)$ függvény $[0;2]$-hoz tartozó görbealatti területe:

$$\int_0^2 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 4.$$

Az ATP derékszögű háromszög területe:

$$\frac{(p-2)\cdot 8}{2} = 4(p-2).$$

Vagyis $4(p-2) + 4 = 2010$, amiből $p = 503{,}5$, azaz $P(503{,}5;0)$.
Mivel $g_1(x) = m(x-2) + 8$, és a P pont ismeretében: $0 = m(503{,}5 - 2) + 8$, azért az egyik keresett meredekség:

$$m_1 = -\frac{16}{1003} \approx -0{,}015\,96.$$

II. eset: Meghatározzuk az OAQ síkidom területét. Az $f(x)$ függvény $[0;2]$-hoz tartozó görbealatti területe 4. Az ATQ derékszögű háromszög területe:

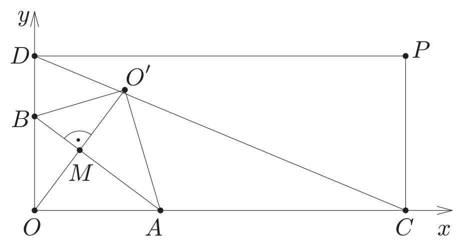
$$\frac{(q+2)\cdot 8}{2} = 4(q+2).$$

Vagyis $4(q+2) - 4 = 2010$, amiből $q = 501{,}5$, azaz $Q(-501{,}5;0)$.
Mivel $g_2(x) = m(x-2) + 8$, és a Q pont ismeretében: $0 = m(-501{,}5 - 2) + 8$, amiből a másik keresett meredekség:

$$m_2 = \frac{16}{1007} \approx 0{,}01589.$$

6. *Egy* 5 cm*-szer* 12 cm*-es téglalap alakú papírlap egyik csúcsából a rövidebb oldalon felmérünk* 3 cm*-t, a hosszú oldalon pedig* 4 cm*-t. Az így kapott két pontra illeszkedő egyenes mentén a papírlap ezen csúcsát szeretnénk ráhajtani a csúccsal szemközti átlóra. Sikerülhet ez? Hová kerül a csúcs?* *(16 pont)*

Megoldás. A téglalapot helyezzük el a koordinátarendszerben az *ábra* szerint. A téglalap csúcsai: $O(0;0)$, $C(12;0)$, $P(12;5)$, $D(0;5)$. Az origóból felmérve kapott pontok: $A(4;0)$, $B(0;3)$. Az AB egyenes mentén a téglalap O csúcsát szeretnénk az O-val szemközti CD átlóra hajtani. Meg kell vizsgálnunk, hogy AB-re tükrözve O-t, hová kerül az O' tükörkép. Végezzük el a tükrözést.



Írjuk fel az AB egyenes egyenletét, két pontja ismeretében: $3x+4y=12$. Írjuk fel az O pontra illeszkedő AB-re merőleges egyenes egyenletét: $-4x+3y=0$. Számítsuk ki a két egyenes M metszéspontjának koordinátáit: $M\left(\frac{36}{25};\frac{48}{25}\right)$. Ezután az O' koordinátái is meghatározhatók, hiszen OO'-n M felezőpont: $O'\left(\frac{72}{25};\frac{96}{25}\right)$.

Írjuk fel a CD egyenes egyenletét (két pontját ismerjük): $5x+12y=60$. Helyettesítsük be az O' koordinátáit:

$$5\cdot\frac{72}{25}+12\cdot\frac{96}{25}=\frac{1512}{25}=60,$$

$48\neq 60$, vagyis az O' nem illeszkedik a CD átlóra. Az átlóra illeszkedő, $\frac{72}{25}$ első koordinátájú Q pont második koordinátáját is kiszámoljuk behelyettesítéssel: $\frac{95}{25}$.

Vagyis a Q ponthoz képest az O' magasabban van. Az O csúcs a hajtás után átkerül az átló túloldalára.

7. *Adott az AB_1C_1, AB_2C_2, $\dots$, AB_nC_n, $\dots$ egyenlőszárú háromszögek sorozata (n pozitív egész szám). Minden n esetén a háromszög AB_n alapja az x tengely pozitív felére esik olyan módon, hogy az A csúcs az origóban van, az alap hossza pedig $2n$. Tudjuk továbbá, hogy a harmadik csúcs illeszkedik az $f(x)=x^2+5$ függvény grafikonjára.*

a) Számítsuk ki az AB_1C_1 háromszög kerületét és területét.

b) Melyik háromszögtől kezdve lesz a háromszögek kerülete nagyobb, mint 190?

c) Igazoljuk, hogy mindegyik háromszög területének mérőszáma osztható hattal. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A háromszög csúcsai: $A(0;0)$, $B_1(2;0)$, $C_1(1;6)$. Mivel $AB_1=2$, $AC_1=B_1C_1=\sqrt{37}$, azért a háromszög kerülete: $k_1=2+2\sqrt{37}\approx 14{,}17$. Mivel az AB_1 oldalhoz tartozó magasság 6, azért a háromszög területe: $t_1=\frac{2\cdot 6}{2}=6$.

b) Legyen az első megfelelő háromszög az AB_nC_n. Ennek a háromszögnek a csúcsai: $A(0;0)$, $B_n(2n;0)$, $C_n(n;n^2+5)$. Mivel

$$AB_n=2n,\quad AC_n=B_nC_n=\sqrt{n^2+(n^2+5)^2}=\sqrt{n^4+11n^2+25},$$

azért a háromszög kerülete: $k_n=2n+2\sqrt{n^4+11n^2+25}$.

Keressük a legkisebb pozitív n értéket, amelyre

$$2n+2\sqrt{n^4+11n^2+25}>190,\quad \text{azaz}\quad \sqrt{n^4+11n^2+25}>95-n.$$

Az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezés növekedő, a jobb oldalon álló pedig csökkenő, ezért néhány próba után megtaláljuk a megfelelő értéket.

Ha $n=8$, akkor

$$\sqrt{8^4+11\cdot 8^2+25}=\sqrt{4825}\approx 69{,}46,\qquad k_8=16+2\cdot 69{,}46=154{,}92<190.$$

Vagyis még nem teljesül az egyenlőtlenség.

Ha $n=9$, akkor

$$\sqrt{9^4+11\cdot 9^2+25}=\sqrt{7477}\approx 86{,}47,\qquad k_9=18+2\cdot 86{,}47=190{,}94>190.$$

Vagyis már teljesül az egyenlőtlenség.

A kilencedik háromszögtől kezdve mindegyiknek a kerülete nagyobb lesz, mint 190.

c) A következő képlet minden n esetén megadja az AB_nC_n háromszög területét:

$$t_n=\frac{2n(n^2+5)}{2}=n(n^2+5).$$

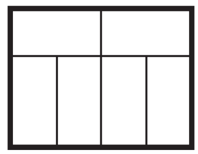
Megmutatjuk, hogy $n(n^2+5)$ minden pozitív egész n esetén osztható hattal. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$n(n^2+5)=n^3+5n=n^3-n+6n=(n-1)n(n+1)+6n.$$

A második tag osztható hattal. Az első tag három egymást követő egész szám szorzata. Ezen tényezők valamelyike osztható hárommal, és legalább egy tényező a három közül páros. Ezért ez a tag is osztható hattal.

Ezzel beláttuk, hogy mindegyik háromszög területének mérőszáma osztható hattal.

8. *Egy iskola ablakainak formáját láthatjuk a mellékelt* ábrán.



Az egyik osztályban elhatározták, hogy az ablakok téglalap alakú üveglapjainak közepére legfeljebb egy üvegmatricát ragasztanak.

a) Hányféleképpen lehet elhelyezni a matricákat egy ablakra, ha a hat üvegtáblára négyet terveznek, és a matricák egyformák?

b) Hányféleképpen lehet elhelyezni a matricákat egy ablakra, ha a hat üvegtáblára hármat terveznek, és a matricák különbözők?

c) Hányféleképpen lehet elhelyezni a matricákat, ha a díszítéshez tengelyesen szimmetrikusan választják ki az üveglapokat, amelyekre egyforma matricákat ragasztanak?

d) Az ablak mind a hat része külön-külön nyitható. Kiválasztanak kettőt véletlenszerűen (egyforma valószínűséggel), amelyeket szellőztetés miatt kinyitnak. Mekkora az esélye, hogy egy hárommatricás ablak esetén, két nem díszített részt fognak kinyitni? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A hat üvegtábla közül bármelyik négy kiválasztható, ezért az esetek száma:

$$\binom{6}{4}=\binom{6}{2}=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}=15.$$

Vagyis ebben az esetben 15-féleképpen díszíthető az ablak.

b) A hat üvegtábla közül bármelyik három kiválasztható, ezen választások száma:

$$\binom{6}{3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}=20.$$

Mivel különbözők, azért minden kiválasztás esetén 6-féleképpen lehet felragasztani a matricákat. Ezek alapján ebben az esetben 120 lehetőség van.

c) Az ablakokon a hat üvegtábla egy függőleges tengelyre szimmetrikusan helyezkedik el, három-három a tengely egy-egy oldalán található. Ha a díszítést is tengelyesen szimmetrikusan szeretnénk elhelyezni, akkor az ablak egyik felét az összes lehetséges módon díszítjük, a másik felén pedig szimmetrikusan helyezzük el a matricákat.

Az ablak egyik felén lehet 1, 2 vagy 3 darab matrica.

I. Ha 1 db van, akkor az összes eset száma: 3.

II. Ha 2 db van, akkor az összes eset száma: 3.

III. Ha 3 db van, akkor az összes eset száma: 1.

Vagyis ebben az esetben 7-féleképpen díszíthető az ablak.

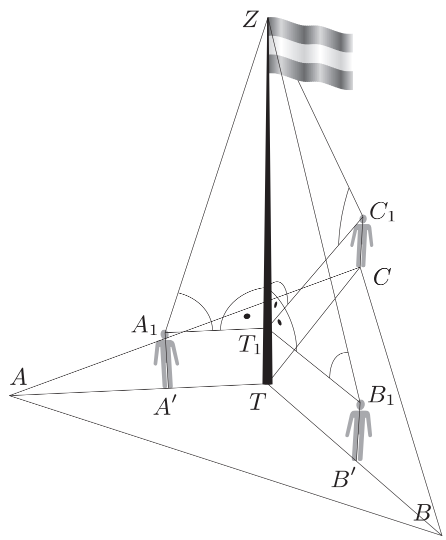
d) A hatból kettőt kiválasztani 15-féleképpen lehet. Bármelyik kettő kiválasztásának ugyanannyi az esélye. Háromra nem ragasztottak matricát. Ezek közül kell kettőt kinyitni, ami háromféleképpen tehető meg. Ezek alapján a keresett valószínűség $\frac{3}{15}$, ami egyszerűsítve $\frac{1}{5}$.

9. *A Fő tér szabályos háromszög alakú vízszintes részét díszburkolattal fedték le. A háromszög közepén áll egy magas zászlórúd. A háromszög csúcsaiban egy-egy kb.* 180 cm *magas ember tartózkodik. Ketten elindulnak a zászlórúd felé. Az egyik akkor áll meg, amikor a rúd tetejét* 72°*-os szögben látja. A másik sétáló akkor áll meg, amikor a rúd tetejét* 65°*-os szögben látja. A helyben maradó társuk* 50°*-os szögben látja a zászlórúd tetejét. Ekkor a három ember által meghatározott háromszög területe* 23,74 m^2.

a) Milyen magas a zászlórúd?

b) Mekkora a díszburkolattal lefedett rész területe? (*16 pont*)

Megoldás. Készítsünk *ábrát* és használjuk az ábra jelöléseit. A szabályos háromszög csúcsai A, B és C, a zászlórúd teteje Z, talppontja az ABC síkon T. Az A pontból induló megfigyelő az AT szakaszon az A' pontig megy, a B-ből induló BT-n a B' pontig. Az A', B', C pontban álló megfigyelők szemmagasságának megfelelő pontokat jelölje A_1, B_1, C_1. Az $A_1B_1C_1$ háromszög nyilván egybevágó az $A'B'C$ háromszöggel. Az $A_1B_1C_1\triangle$ középpontja legyen T_1.



a) Tudjuk, hogy $ZA_1T_1\sphericalangle = 72°$, $ZB_1T_1\sphericalangle = 65°$, $ZC_1T_1\sphericalangle = 50°$, továbbá

$$ATB\sphericalangle = BTC\sphericalangle = CTA\sphericalangle = A_1T_1B_1\sphericalangle =$$
$$= B_1T_1C_1\sphericalangle = C_1T_1A_1\sphericalangle = 120°.$$

Legyen $T_1Z = x$, ekkor

$$T_1C_1 = \frac{x}{\operatorname{tg} 50°}, \quad T_1B_1 = \frac{x}{\operatorname{tg} 65°}, \quad T_1A_1 = \frac{x}{\operatorname{tg} 72°}.$$

A szöveg szerint az $A'B'C$ és a vele egybevágó $A_1B_1C_1$ háromszög területe 23,74 m^2.

Ezen háromszög területe egyenlő az $A_1T_1B_1$, $B_1T_1C_1$, $C_1T_1A_1$ háromszögek területének összegével. Használjuk a szinuszos területképletet, ekkor:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{\operatorname{tg} 72° \operatorname{tg} 65°} + \frac{x^2}{\operatorname{tg} 65° \operatorname{tg} 50°} + \frac{x^2}{\operatorname{tg} 50° \operatorname{tg} 72°} \right) \cdot \sin 120° = 23{,}74.$$

Ebből kapjuk, hogy $x \approx 8{,}2$ m. Tudjuk, hogy $TT_1 = 1{,}8$ m (az emberek magassága a szöveg szerint ennyinek vehető).

Vagyis a zászlórúd magassága kb. 10 méter.

b) Tudjuk, hogy $T_1C_1 = \dfrac{8{,}2}{\operatorname{tg} 50°}$, és $T_1C_1 = TC = TB = TA$. Most is használhatjuk a szinuszos területképletet. Ekkor

$$t_{ABC} = t_{ATB} + t_{BTC} + t_{CTA} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8{,}2^2}{\operatorname{tg}^2 50°} \cdot \sin 120° \approx 61{,}5.$$

A díszburkolattal lefedett rész területe kb. 61,5 m^2.