

I. rész

1. Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét számológép nélkül:

a) $\sqrt{100^{\lg\left(1-\sin\frac{19\pi}{6}\right)}}$ b) $\cos^2 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ$

c) $\log_\pi \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{4}\right) + 2^{\log_4 9}$.

(11 pont)

2. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 3xy + 4} + x(x - 3y) &= 2, \\ 2x - y &= 3.\end{aligned}$$

(12 pont)

3. Adott az

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + a = 0$$

egyenletű kör. Az abszcissa tengelyen pontosan egy olyan pont van, melyből a körhöz húzott érintők 60° -os szöget zárnak be egymással.

a) Határozzuk meg az a paraméter értékét.

b) Mekkora szöget zárnak be egymással a kör origóból húzott érintői az $a = 12$ paraméter esetén? (14 pont)

4. Három pozitív szám egy mértani sorozat három szomszédos eleme. Ha a másodikhoz hozzáadunk kettőt, egy számtani sorozat három egymás utáni elemét kapjuk. Ha az így kapott sorozat első elemét 16-tal növeljük, ismét egy újabb, mértani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Melyik az eredeti három szám? (14 pont)

II. rész

5. Két egyenes út A pontban, derékszögben metszi egymást. Az útkereszteződéstől 70 km távolságban az egyik úton, 10 km távolságban a másik úton étterem van. A két étteremből egyszerre indul el egy-egy társaság A felé. A távolabbról jövők óránként 4 km-t, a közelebből jövők óránként 3 km-t tesznek meg.

a) Hány óra múlva lesznek egymáshoz a legközelebb, és mekkora a köztük lévő legkisebb távolság?

b) Indulás után hány órával lesz a köztük lévő távolság 50 km? (16 pont)

6. Egy dobókockával háromszor dobunk.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata prímszám?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata négyzetszám? (16 pont)

7. Egy 10 cm sugarú egyenes henger alakú edénybe vizet öntünk. Ezután behelyezünk egy olyan négyzet alapú egyenes gúlát, amelynek minden éle 12 cm. A gúla lesüllyed a víz fenekére, alapnégyzete a henger alapkörére illeszkedik, és a gúla csúcsa 3 cm magasan kiáll a vízből. Mennyit emelkedik a vízszint? (16 pont)

8. A $\sin^2 x + \sin x + 2^m - 4 = 0$ egyenletben határozzuk meg az m paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban pontosan egy gyöke legyen. (16 pont)

9. Határozzuk meg az $y = x^2 + 4$, $y = -3x + 4$, $y = x^3$ egyenletű görbék grafikonja által határolt véges terület nagyságát. Ezt a síkidomot forgassuk meg az x tengely körül. Mekkora az így kapott forgástest térfogata? (16 pont)