

I. rész

1. a) Igazoljuk, hogy $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[4]{18}$ és $\sqrt[4]{50}$ lehet egy derékszögű háromszög három oldalhosszának mérőszáma.
b) Igazoljuk, hogy

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{és} \quad \frac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{6} - 3\sqrt{3}}$$

egyenlő.

(10 pont)

2. a) Oldjuk meg az egész számok halmazán: $(5x + 60)^2 = (-x - 192)^2$.
b) Oldjuk meg a valós számok halmazán: $\sqrt{5x + 60} = \sqrt{-x - 192}$.
c) Oldjuk meg a

$$\sin(5\alpha + 60^\circ) = \sin(-\alpha - 192^\circ)$$

egyenletet, ha $\alpha \in [-180^\circ; 180^\circ]$.

(13 pont)

3. Egy 32 fős osztályban a lányok testmagasságátlaga 165 cm, a fiúké 172 cm.
a) Adjuk meg azt a legszűkebb intervallumot, ahová az osztály testmagasságának átlaga eshet.
b) Évközben érkezett az osztályba egy 170 cm magas lány. A lányok testmagasságátlaga továbbra is egész szám maradt. Hány lány lehetett eredetileg az osztályban?

(14 pont)

4. Egy téglalap alapú egyenes hasáb alapéleinek hossza 3 és 5, testátlója pedig $\frac{\sqrt{497}}{2}$.

- a) Mekkora szöget zár be a testátló a rövidebb alapéllal?
b) Mekkora a test felszíne?
c) A feladatban szereplő hasábbal egyenlő magasságú, egyenlő térfogatú négyzetes oszlopot szeretnénk tervezni. Hány százalékkal kell változtatni az alapélek hosszát?

(14 pont)

II. rész

5. Az $f(x) = x^3$ a nemnegatív valós és a $g(x) = mx - 2m + 8$ a valós számok halmazán értelmezett függvények (m valós paraméter). A függvények grafikonjai és az x tengely által meghatározott síkidom területe 2010. Határozzuk meg az m paraméter értékét.

(16 pont)

6. Egy 5 cm-szer 12 cm-es téglalap alakú papírlap egyik csúcsából a rövidebb oldalon felmérünk 3 cm-t, a hosszú oldalon pedig 4 cm-t. Az így kapott két pontra illeszkedő egyenes mentén a papírlap ezen csúcsát szeretnénk ráhajtani a csúcscsal szemközti átlóra. Sikerülhet ez? Hová kerül a csúcs?

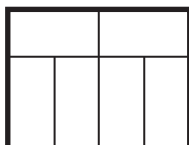
(16 pont)

7. Adott az $AB_1C_1, AB_2C_2, \dots, AB_nC_n, \dots$ egyenlőszárú háromszögek sorozata (n pozitív egész szám). Minden n esetén a háromszög AB_n alapja az x tengely pozitív felére esik olyan módon, hogy az A csúcs az origóban van, az alap hossza pedig $2n$. Tudjuk továbbá, hogy a harmadik csúcs illeszkedik az $f(x) = x^2 + 5$ függvény grafikonjára.

- a) Számítsuk ki az AB_1C_1 háromszög kerületét és területét.
b) Melyik háromszögtől kezdve lesz a háromszögek kerülete nagyobb, mint 190?
c) Igazoljuk, hogy mindegyik háromszög területének mérőszáma osztható hattal.

(16 pont)

8. Egy iskola ablakainak formáját láthatjuk a mellékelt ábrán.



Az egyik osztályban elhatározták, hogy az ablakok téglalap alakú üveglapjainak közepére legfeljebb egy üvegmaticát ragasztanak.

- a) Hányféleképpen lehet elhelyezni a matricákat egy ablakra, ha a hat üvegtáblára négyet terveznek, és a matricák egyformák?
b) Hányféleképpen lehet elhelyezni a matricákat egy ablakra, ha a hat üvegtáblára hármatot terveznek, és a matricák különbözők?
c) Hányféleképpen lehet elhelyezni a matricákat, ha a díszítéshez tengelyesen szimmetrikusan választják ki az üveglapokat, amelyekre egyforma matricákat ragasztanak?

d) Az ablak mind a hat része külön-külön nyitható. Kiválasztanak kettőt véletlenszerűen (egyforma valószínűséggel), amelyeket szellőztetés miatt kinyitnak. Mekkora az esélye, hogy egy hárommatricás ablak esetén, két nem díszített részt fognak kinyitni? (16 pont)

9. A Fő tér szabályos háromszög alakú vízszintes részét díszburkolattal fedték le. A háromszög közepén áll egy magas zászlórúd. A háromszög csúcaiban egy-egy kb. 180 cm magas ember tartózkodik. Ketten elindulnak a zászlórúd felé. Az egyik akkor áll meg, amikor a rúd tetejét 72° -os szögben látja. A másik sétáló akkor áll meg, amikor a rúd tetejét 65° -os szögben látja. A helyben maradó társuk 50° -os szögben látja a zászlórúd tetejét. Ekkor a három ember által meghatározott háromszög területe $23,74 \text{ m}^2$.

a) Milyen magas a zászlórúd?

b) Mekkora a díszburkolattal lefedett rész területe?

(16 pont)