Elméleti feladatok

1. feladat. A Föld–Hold rendszer fejlődése

1. Impulzusmomentum-megmaradás

1a–1c. A Föld–Hold rendszer teljes impulzusmomentuma a Föld forgásából és a Hold keringéséből származó két tag összege. A feladat jelöléseit használva kezdetben az impulzusmomentum $L_1 = I_\mathrm{F}\omega_\mathrm{F1} + I_\mathrm{H1}\omega_\mathrm{H1}$, a folyamat végén pedig, amikor a Föld forgásának és a Hold keringésének szögsebessége megegyezik, $L_2 = I_\mathrm{F}\omega_2 + I_\mathrm{H2}\omega_2$. Az impulzusmomentum-megmaradás tétel értelmében $L_1 = L_2$, és L_2-ben a Föld impulzusmomentumát elhanyagolva azt kapjuk, hogy

$$L_1 = I_\mathrm{F}\omega_\mathrm{F1} + I_\mathrm{H1}\omega_\mathrm{H1} = I_\mathrm{H2}\omega_2. \tag{1}$$

(Emlékeztetőül, az impulzusmomentumot L, a tehetetlenségi nyomatékot I, a szögsebességet ω jelöli. Az 1 index a kezdeti állapotra, 2 a végső állapotra, F a Földre, H pedig a Holdra utal.)

2. Végső pályasugár és szögsebesség a Föld–Hold rendszerben

2a–2c. Feltételezve, hogy a Hold a végső helyzetben is körpályán kering a Föld körül, mozgásegyenletére (rendezés után) az adódik, hogy $\omega_2^2 D_2^3 = GM_\mathrm{F}$, ahol D_2 a végső pályasugár, G a gravitációs állandó, M_F pedig a Föld tömege. Felhasználva az L_1-re kapott (1) összefüggést, valamint hogy $I_\mathrm{H2} = M_\mathrm{H}D_2^2$, a végső pályasugarat és szögsebességet könnyen kifejezhetjük a kért mennyiségekkel:

$$D_2 = \frac{L_1^2}{GM_\mathrm{F}M_\mathrm{H}^2}, \qquad \omega_2 = \frac{G^2M_\mathrm{F}^2M_\mathrm{H}^3}{L_1^3}. \tag{2}$$

2d–2e. Közismert, hogy az R sugarú, M tömegű homogén gömb tehetetlenségi nyomatéka $\frac{2}{5}MR^2$. Ennek felhasználásával, a feladatban leírt modell alapján a Föld tehetetlenségi nyomatéka

$$I_\mathrm{F} = \frac{2}{5}\frac{4\pi}{3}\left(r_1^5\varrho_1 + \left(r_0^5 - r_1^5\right)\varrho_0\right) = 8{,}0\cdot 10^{37}\ \mathrm{kg\ m^2}.$$

(Az első tag az r_1 sugarú, ϱ_1 sűrűségű belső mag járuléka, míg a második tag az r_0 külső sugarú, ϱ_0 sűrűségű külső köpeny járuléka.)

2f–2h. A feladatban megadott adatokat a már felírt (1)–(2) formulákba behelyettesítve a keresett számértékek könnyen meghatározhatók:

$$L_1 = 3{,}4\cdot 10^{34}\ \frac{\mathrm{kg\ m^2}}{\mathrm{s}},$$

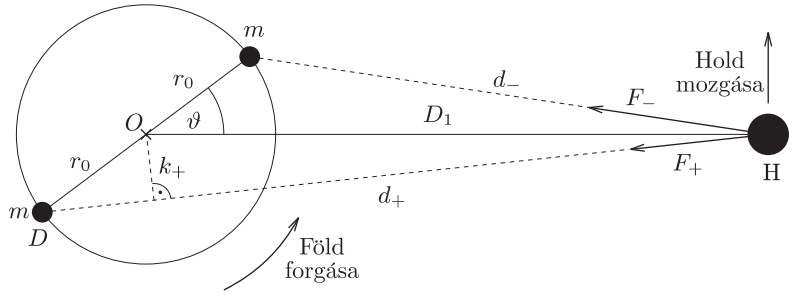
$$D_2 = 5{,}4\cdot 10^{8}\ \mathrm{m}, \qquad \text{tehát}\quad D_2 = 1{,}4D_1,$$

$$\omega_2 = 1{,}6\cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{s}}, \qquad \text{így a periódusidő 46 nap.}$$

2i. A végső helyzetben a Föld impulzusmomentuma $I_\mathrm{F}\omega_2 = 1{,}3\cdot 10^{32}\ \frac{\mathrm{kg\ m^2}}{\mathrm{s}}$, míg a Holdé $I_\mathrm{H2}\omega_2 = 3{,}4\cdot 10^{34}\ \frac{\mathrm{kg\ m^2}}{\mathrm{s}}$, ami közel 260-szorosa a Földének, tehát a számolás elején tett elhanyagolás valóban jogos volt.

3. Mennyivel távolodik a Hold évenként?

A Földön levő vízréteg szabad felszíne állandó gravitációs potenciálú felületen helyezkedik el. Ha csak a Föld gravitációs terét vennénk figyelembe, akkor az ekvipotenciális felületek koncentrikus gömbök lennének. A Hold gravitációs terének hatására e gömbök deformálódnak; a Föld Hold felé eső, és azzal átellenesen elhelyezkedő pontjukban „kitüremkedések” jönnek létre. (Ezeknek a kitüremkedéseknek a forgó Földhöz képesti mozgását érzékeljük árapályként.) A Föld forgása miatt a kitüremkedések kicsiny $\vartheta > 0$ szöggel kifordulnak a Föld–Hold egyenesből. A feladat szerinti modellben a kitüremkedéseket két m tömegű tömegponttal helyettesítjük, melyek a Föld felszínének átellenes pontjaiban helyezkednek el, ahogy az *1. ábrán* látható.



1. ábra

Mivel $\vartheta > 0$, a két égitest forgatónyomatékot fejt ki egymásra, mely a Föld forgását lassítja, a Hold pályamenti impulzusmomentumát pedig növeli.

3a–3f. Az egyszerű modell alapján könnyen kiszámolhatjuk két tömegpont Holdra ható forgatónyomatékát.

A koszinusztétel alapján a tömegpontok távolsága a Holdtól

$$d_\pm = D_1^2 + r_0^2 \pm 2D_1 r_0 \cos\vartheta,$$

tehát a tömegpontok és a Hold közti gravitációs erő

$$F_\pm = \frac{GmM_\mathrm{H}}{d_\pm}.$$

Az ODH háromszög területét kétféleképpen fölírva $\frac{1}{2}r_0 D_1 \sin\vartheta = \frac{1}{2}k_+ d_+$, ahonnan az F_+ erőhöz tartozó erőkar

$$k_+ = \frac{r_0 D_1 \sin\vartheta}{d_+}.$$

Hasonló formula kapható a másik erőkarra is, így a két tömegpont által kifejtett forgatónyomaték:

$$\tau_\pm = F_\pm k_\pm = \frac{GmM_\mathrm{H} r_0 D_1 \sin\vartheta}{\left(D_1^2 + r_0^2 \pm 2D_1 r_0 \cos\vartheta\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Egyszerűsítsünk D_1^3-el és alkalmazzuk az $(1+\varepsilon)^a \approx 1+\varepsilon a$ közelítő formulát, mely $\varepsilon \ll 1$ esetén érvényes, figyelembe véve, hogy esetünkben $\frac{r_0}{D_1} \ll 1$.

$$\tau_\pm = \frac{GmM_\mathrm{H} r_0 \sin\vartheta}{D_1^2}\left(1 + \frac{r_0^2}{D_1^2} \pm 2\frac{r_0}{D_1}\cos\vartheta\right)^{-\frac{3}{2}} \approx$$

$$\approx \frac{GmM_\mathrm{H} r_0 \sin\vartheta}{D_1^2}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{r_0^2}{D_1^2} \mp 3\frac{r_0}{D_1}\cos\vartheta\right).$$

A fenti közelítéssel élve a Holdra ható, keringését gyorsító eredő forgatónyomaték:

$$\tau = \tau_- - \tau_+ \approx \frac{6GmM_\mathrm{H} r_0^2 \sin\vartheta\cos\vartheta}{D_1^3} = 4,1 \cdot 10^{16}\ \mathrm{Nm}. \tag{3}$$

3g–3h. A Föld körül körpályán keringő Hold mozgásegyenlete

$$\frac{GM_\mathrm{F}M_\mathrm{H}}{D^2} = M_\mathrm{H} D \omega_\mathrm{H}^2,$$

ahonnan a Hold szögsebessége $\omega_\mathrm{H} = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{F}}{D^3}}$. Ennek felhasználásával a Hold impulzusmomentuma a keringési sugárral kifejezve:

$$L_\mathrm{H} = I_\mathrm{H}\omega_\mathrm{H} = M_\mathrm{H}\sqrt{DGM_\mathrm{F}}. \tag{4}$$

Ez az összefüggés fönnáll az impulzusmomentum és a pályasugár jelenlegi $L_{\mathrm{H}1}$ és D_1 értéke mellett is, és Δt idővel később is, amikor az impulzusmomentum értéke a τ forgatónyomaték hatására $L_{\mathrm{H}1} + \tau\Delta t$ lesz, a Hold pályasugara pedig $D_1 + \Delta D$-re nő. Mivel

$$\sqrt{D + \Delta D} \approx \sqrt{D} + \frac{\Delta D}{2\sqrt{D}},$$

azért a (4) összefüggésben a két oldal megváltozására azt kapjuk, hogy

$$\Delta L_{1M} = \tau\Delta t = \frac{M_\mathrm{H}}{2}\sqrt{\frac{GM_\mathrm{F}}{D_1}}\Delta D.$$

Innen ΔD-t kifejezve, és $\Delta t = 1$ év $= 3,1 \cdot 10^7$ s értékkel számolva a Hold jelenlegi éves távolodására azt kapjuk, hogy

$$\Delta D_1 = \frac{2\tau\Delta t}{M_\mathrm{H}}\sqrt{\frac{D_1}{GM_\mathrm{F}}} = 0{,}034\ \mathrm{m} = 3{,}4\ \mathrm{cm}. \tag{5}$$

A (3) formulával megadott τ forgatónyomaték csökkenti a Föld impulzusmomentumát, $\Delta L_\mathrm{F} = -\tau\Delta t = I_\mathrm{F}\Delta\omega_\mathrm{F}$, ahonnan $\Delta t = 1$ év alatt a jelenlegi szögsebesség-változás:

$$\Delta\omega_{\mathrm{F}1} = -\frac{\tau\Delta t}{I_\mathrm{F}} = -1{,}6 \cdot 10^{-14}\ \frac{1}{\mathrm{s}}. \tag{6}$$

Mivel a periódusidő $T_\mathrm{F} = \dfrac{2\pi}{\omega}$, a nap hossza egy év alatt

$$\Delta T_\mathrm{F} = 2\pi\left(\frac{1}{\omega+\Delta\omega} - \frac{1}{\omega}\right) \approx -\frac{2\pi}{\omega^2}\Delta\omega = 1{,}9\cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}$$

értékkel nő.

4. Hová lesz az energia?

4a–4b. Korábban (a 3g. pontban) láttuk, hogy a körpályán keringő Hold szögsebessége

$$\omega_{\mathrm{H}1} = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{F}}{D_1^3}}.$$

Ezt felhasználva a Föld–Hold rendszer mechanikai energiája jelenleg:

$$E = \frac{I_\mathrm{F}\omega_{\mathrm{F}1}^2}{2} + \frac{I_\mathrm{H}\omega_{\mathrm{H}1}^2}{2} - \frac{GM_\mathrm{F}M_\mathrm{H}}{D_1} = \frac{I_\mathrm{F}\omega_{\mathrm{F}1}^2}{2} - \frac{GM_\mathrm{F}M_\mathrm{H}}{2D_1}.$$

Figyelembe véve, hogy

$$\Delta(\omega^2) = (\omega+\Delta\omega)^2 - \omega^2 \approx 2\omega\Delta\omega, \qquad \text{és} \qquad \Delta\left(\frac{1}{D}\right) = \frac{1}{D+\Delta D} - \frac{1}{D} \approx -\frac{\Delta D}{D^2},$$

valamint felhasználva az (5)–(6) eredményeket, az egy év alatt bekövetkező energiaváltozás:

$$\Delta E = I_\mathrm{F}\omega_{\mathrm{F}1}\Delta\omega_{\mathrm{F}1} + \frac{GM_\mathrm{F}M_\mathrm{H}}{2D_1^2}\Delta D_1 = -9{,}0\cdot 10^{19}\ \mathrm{J}. \tag{7}$$

4c–4d. A Föld teljes felszínét $h = 0{,}5$ m vastagon beborító vízréteg tömege:

$$M_\mathrm{víz} = 4\pi r_0^2 h\varrho_\mathrm{víz} = 2{,}6\cdot 10^{17}\ \mathrm{kg}.$$

A víz viszkozitása miatt egy év alatt disszipálódott energia:

$$\Delta E_\mathrm{víz} = -gM_\mathrm{víz}h\cdot 2\cdot 365\cdot 0{,}1 = -9{,}3\cdot 10^{19}\ \mathrm{J},$$

ami jól egyezik a (7) egyenletben kapott energiacsökkenéssel.

2. feladat. Lézeres Doppler-hűtés és optikai szirupok

Ennek a feladatnak a megoldásában kulcsszerepet játszik a relativisztikus, longitudinális Doppler-effektus. Ha az ω körfrekvenciájú fényt kibocsátó fényforrás a megfigyelőhöz képest v relatív sebességgel mozog, akkor a megfigyelő által észlelt ω' körfrekvencia

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1\pm\frac{v}{c}}{1\mp\frac{v}{c}}} \approx \omega\left(1\pm\frac{v}{c}\right), \tag{8}$$

ahol c a fénysebesség, és a második, közelítő egyenlőség akkor igaz, ha $\dfrac{v}{c} \ll 1$. A felső előjelezés akkor érvényes, ha a fényforrás és a megfigyelő közelednek egymáshoz, az alsó pedig akkor, ha távolodnak. (A közelítés az $\varepsilon \ll 1$ esetén érvényes $(1+\varepsilon)^a \approx 1 + a\varepsilon$ formula többszöri alkalmazásával kapható meg.)

Jelölje ω_L a lézer laboratóriumban mért körfrekvenciáját, legyen $\hbar\omega_0$ az atom két állapota közti energiakülönbség. Ekkor a $-x$ tengely irányába haladó foton energiája $\hbar\omega_L$, impulzusa $-\dfrac{\hbar\omega_L}{c} = -\hbar q$, ahol q a hullámszám.

A feladatmegoldás során végig feltételezzük, hogy $\dfrac{v}{c} \ll 1$, valamint

$$\frac{\hbar q}{mv} = \frac{\hbar\omega_L}{mvc} \ll 1,$$

és ezen kis mennyiségekben első rendig számolunk.

I. rész: A lézeres hűtés alapjai

1. Elnyelés (abszorpció)

A (8) egyenlet alapján a fényforráshoz v sebességgel közeledő atom által észlelt frekvencia $\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)$, tehát a rezonanciafeltétel $\omega_0 = \omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)$. A foton elnyelése után az atom impulzusa a foton impulzusával csökken, így $p_\mathrm{a} = mv - \frac{\hbar\omega_L}{c}$. Az atom teljes energiája a mozgási energiájának és a gerjesztési energiának az összege, azaz

$$\varepsilon_\mathrm{a} = \frac{p_\mathrm{a}^2}{2m} + \hbar\omega_0 \approx \frac{mv^2}{2} + \hbar\omega_L.$$

2. Egy foton spontán kibocsátása (emissziója) a $-x$ irányban

A $v' = v - \frac{\hbar\omega_L}{vc}$ sebességgel mozgó atom saját rendszerében ω_0 frekvenciájú fotont bocsát ki, ami azt jelenti, hogy a labor rendszeréből a foton frekvenciája

$$\omega_0\left(1-\frac{v'}{c}\right) = \omega_0\left(1-\frac{v}{c}+\frac{\hbar\omega_L}{mvc}\frac{v}{c}\right) \approx \omega_0\left(1-\frac{v}{c}\right) \approx \omega_L. \tag{9}$$

Innen a foton energiája és impulzusa egyszerűen kiszámolható:

$$p_\mathrm{f}^- \approx -\frac{\hbar\omega_L}{c}, \qquad \varepsilon_\mathrm{f}^- \approx \hbar\omega_L. \tag{10a}$$

A foton kibocsátása után az atom impulzusa ezzel az értékkel nő, így

$$p_\mathrm{a}^- \approx mv, \qquad \varepsilon_\mathrm{a}^- = \frac{\left(p_\mathrm{a}^-\right)^2}{2m} \approx \frac{mv^2}{2}. \tag{10b}$$

Végeredményben az abszorpciós-emissziós folyamat után a két részecske állapota olyan, mintha a foton nem is lépett volna kölcsönhatásba az atommal.

3. Egy foton spontán kibocsátása (emissziója) a $+x$ irányban

Ha az atom $+x$ irányban bocsátja ki a fotont, akkor labor rendszerében nagyobbnak észleljük a foton frekvenciáját. Az előző (9) levezetéshez hasonlóan kell számolnunk, azonban v' előjele módosul:

$$\omega_0\left(1+\frac{v'}{c}\right) \approx \omega_0\left(1+\frac{v}{c}\right) \approx \omega_L\left(1+\frac{2v}{c}\right).$$

Ezután már könnyen megkapjuk a foton, illetve az atom energiáját és impulzusát:

$$p_\mathrm{f}^+ \approx \frac{\hbar\omega_L}{c}\left(1+\frac{2v}{c}\right), \qquad \varepsilon_\mathrm{f}^+ \approx \hbar\omega_L\left(1+\frac{2v}{c}\right), \tag{11a}$$

$$p_\mathrm{a}^+ \approx mv - \frac{2\hbar\omega_L}{c}, \qquad \varepsilon_\mathrm{a}^+ \approx \frac{mv^2}{2}\left(1-\frac{4\hbar\omega_L}{mvc}\right). \tag{11b}$$

4. Átlagos kibocsátás (emisszió) az elnyelés (abszorpció) után

Minthogy a spontán emisszió egyforma valószínűséggel mehet végbe $+x$ és $-x$ irányban, a keresett átlagértékek a (10) és (11) mennyiségek számtani közepeiként kaphatók meg:

$$\bar{p}_\mathrm{f} \approx \frac{\hbar\omega_L v}{c^2} \approx 0, \qquad \bar{\varepsilon}_\mathrm{f} \approx \hbar\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right), \tag{12a}$$

$$\bar{p}_\mathrm{a} \approx mv - \frac{\hbar\omega_L}{c}, \qquad \bar{\varepsilon}_\mathrm{a} \approx \frac{mv^2}{2}\left(1-\frac{2\hbar\omega_L}{mvc}\right). \tag{12b}$$

5. Energia- és impulzusátadás

A $-x$ irányban haladó foton által az atomnak átlagosan átadott impulzus és energia a kölcsönhatás utáni (12) átlagértékek és a kezdeti értékek különbségeként kapható meg:

$$\Delta p^- = \bar{p}_\mathrm{a} - mv \approx -\frac{\hbar\omega_L}{c}, \qquad \Delta\varepsilon^- = \bar{\varepsilon}_\mathrm{a} - \frac{mv^2}{2} \approx -\frac{\hbar\omega_L v}{c}. \tag{13}$$

6. Energia- és impulzusátadás egy $+x$ irányú lézersugárral

Ha a foton nem szemből, hanem az atommal azonos irányból érkezik, teljesen hasonló módon ellentétes előjelű eredményeket kapunk az átlagos energia- és impulzusátadásra:

$$\Delta p^+ \approx \frac{\hbar\omega_L'}{c}, \qquad \Delta\varepsilon^+ \approx \frac{\hbar\omega_L' v}{c}. \tag{14}$$

II. rész: Disszipáció és az optikai szirup alapjai

A feladat közlése szerint a laboratóriumban *nyugalomban* levő atomok

$$P_{\mathrm{g}}(\omega_L) = \frac{N_{\mathrm{g}}}{N} = \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0-\omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}. \tag{15}$$

valószínűséggel találhatók gerjesztett állapotban az ω_L frekvenciájú fotonokkal való kölcsönhatás eredményeként. A képletben Ω_R az úgynevezett Rabi-frekvencia, melynek négyzete a lézer intenzitásával arányos, Γ pedig az adott átmenet élettartamának reciproka. Látható, hogy ez a valószínűség $\omega_L = \omega_0$ esetén maximális, nem haladja meg az $\frac{1}{2}$ értéket, és $|\omega_L - \omega_0| \gg \Gamma, \Omega_R$ esetén gyorsan csökken.

7. A lézer által az atomnyalábra kifejtett erő

A (15) képlet nyugalomban levő atomokra vonatkozik, tehát csak úgy használhatjuk, ha áttérünk az atomokkal együtt v sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerbe. Ekkor azonban Doppler-eltolódás miatt a $-x$ irányban haladó fotonok frekvenciáját $\omega^- = \omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)$-nek, míg a $+x$ irányban haladókét $\omega^+ = \omega_L\left(1-\frac{v}{c}\right)$-nek észleljük. Mindkét fotonnyaláb egymástól függetlenül gerjeszti az atomok $N_{\mathrm{g}} = NP_{\mathrm{g}}$ részét, így időegységenként ΓN_{g} elnyelési–kibocsátási folyamat megy végbe a balra, illetve jobbra haladó fotonokkal. Felhasználva a (13) és (14) eredményeket, a keresett erő:

$$F = \Gamma N\big(P_{\mathrm{g}}(\omega^-)\Delta p^- + P_{\mathrm{g}}(\omega^+)\Delta p^+\big) =$$

$$= \frac{\Omega_R^2 N\Gamma\hbar\frac{\omega_L}{c}}{\left(\omega_0-\omega_L\left(1-\frac{v}{c}\right)\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2} - \frac{\Omega_R^2 N\Gamma\hbar\frac{\omega_L}{c}}{\left(\omega_0-\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}.$$

8. Kissebességű határeset

Az erőre kapott formula

$$F = \frac{A}{B+C} - \frac{A}{B-C} \approx \frac{A}{B}\left(1-\frac{C}{B}-\left(1+\frac{C}{B}\right)\right) = -\frac{2AC}{B^2}$$

alakú, ahol $C \ll B$. A számolást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$F \approx -\frac{4\Omega_R^2 N\Gamma\hbar\left(\frac{\omega_L}{c}\right)^2}{\left((\omega_0-\omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2\right)^2}(\omega_0-\omega_L)v. \tag{16}$$

Látható, hogy az erő pozitív (gyorsító), ha $\omega_L > \omega_0$, zérus, ha $\omega_L = \omega_0$, és negatív (lassító), ha $\omega_L < \omega_0$. Természetesen a jelenség független az x tengely irányításától, tehát ha a lézer frekvenciáját kicsit az átmenet „alá hangoljuk”, akkor mindig az atom mozgásával ellentétes irányú a fotonok által kifejtett erő.

9. Optikai szirup

Ha az atomokra sebességükkel arányos fékezőerő hat, akkor mozgásegyenletük $m\dot{v} = -\beta v$, ahol a $\beta > 0$ konstans a (16) egyenletből kiolvasható. Figyelembevéve a $v(0) = v_0$ kezdeti feltételt, az atomok sebessége a

$$v(\tau) = v_0 e^{-\frac{\beta}{m}\tau}$$

függvény szerint csökken. Az ekvipartíció-tétel értelmében $T \sim v^2$, tehát a hőmérséklet $T(\tau) = T_0 e^{-\frac{2\beta}{m}\tau}$ időfüggést mutat.

3. feladat. Miért olyan nagyok a csillagok?

1. Csillagok központi hőmérsékletének klasszikus becslése

Akkor közelíti meg a két proton egymást d_c távolságra, ha mozgási energiájuk összege megegyezik a d_c távolsághoz tartozó elektromos potenciális energiával. A mozgási energiák az ekvipartíció-tételből határozhatók meg. Tehát

$$2\frac{m_{\mathrm{p}} v_{\mathrm{rms}}^2}{2} = 2\frac{3}{2}kT_c = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d_c}, \quad \text{így} \quad T_c = \frac{q^2}{12\pi\varepsilon_0 d_c k} = 5{,}5\cdot 10^9\ \mathrm{K}. \tag{17}$$

2. Annak igazolása, hogy az előző hőmérsékletbecslés hibás

A hidrosztatikai egyensúlyt leíró $\dfrac{\Delta P}{\Delta r} = -\dfrac{GM_r\rho_r}{r^2}$ egyenletben elvégezve a javasolt $\Delta r = R$, $\Delta P = -P_c$, $M_r = M$ és $\rho_r = \rho_c$ helyettesítéseket, a központi nyomásra azt kapjuk, hogy $P_c = \dfrac{GM\rho_c}{R}$. Ugyanakkor az ideális gáztörvény szerint

$$P_c = \frac{NkT_c}{V} = \frac{2\rho_c kT_c}{m_\mathrm{p}},$$

ahol felhasználtuk, hogy $N = \dfrac{2M}{m_\mathrm{p}}$, hiszen a protonok adják lényegében a csillag teljes tömegét, de az elektronok is hozzájárulnak a nyomáshoz. A két egyenletből megkapható a keresett központi hőmérséklet:

$$T_c = \frac{GMm_\mathrm{p}}{2kR}.$$

Innen az M/R arány a (17) értékkel számolva:

$$\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_\mathrm{p}} = 1{,}4 \cdot 10^{24}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}. \tag{18}$$

A Nap esetén ugyanez az arány $\dfrac{M_\odot}{R_\odot} = 2{,}9 \cdot 10^{21}\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$, ami három nagyságrenddel kisebb, mint az előző elmélet jóslata!

3. Csillagok központi hőmérsékletének kvantummechanikai becslése

Megoldásunk hasonló az 1. ponthoz. A következő egyenleteket írhatjuk föl:

(19a) ekvipartíció-tétel: $$\frac{1}{2}m_\mathrm{p}v_\mathrm{rms}^2 = \frac{3}{2}kT_c,$$

(19b) mechanikai energiamegmaradás: $$m_\mathrm{p}v_\mathrm{rms}^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d_c},$$

(19c) de Broglie-hullámhossz: $$d_c = \frac{\lambda_\mathrm{p}}{\sqrt{2}} = \frac{h}{\sqrt{2}m_\mathrm{p}v_\mathrm{rms}}.$$

Az egyenletrendszer egyszerű megoldható T_c-re:

$$T_c = \frac{q^4 m_\mathrm{p}}{24\pi^2\varepsilon_0^2 kh^2} = 9{,}7 \cdot 10^6\ \mathrm{K}. \tag{20}$$

A (18) összefüggés felhasználásával ehhez a hőmérséklethez tartozó M/R arány $2{,}4 \cdot 10^{21}\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$, ami már közel azonos a Nap esetén megfigyelésekből számolt értékkel.

4. Csillagok tömeg/sugár aránya

Felhasználva az (18) és a (20) formulákat,

$$\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2\varepsilon_0^2 Gh^2}, \tag{21}$$

ami valóban kizárólag univerzális fizikai állandóktól függ.

5. A legkisebb csillagok tömege és sugara

Az elektronok száma megegyezik a protonok számával, ami $\dfrac{M}{m_\mathrm{p}}$, tehát

$$n_\mathrm{e} = \frac{M}{m_\mathrm{p}V} = \frac{3M}{4\pi R^3 m_\mathrm{p}}. \tag{22}$$

Ez azt jelenti, hogy a szomszédos elektronok közti tipikus távolság $d_\mathrm{e} = n_\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$. (Számolhatunk úgy, mintha az elektronok egy szabályos, d_e rácsállandójú köbös rácsban helyezkednének el a csillag belsejében.)

A legkisebb sugarat kicsit hosszadalmas, de egyszerű számolással kaphatjuk meg. Induljunk ki a $d_\mathrm{e} \geq \dfrac{\lambda_\mathrm{e}}{2^{1/2}} = \dfrac{h}{2^{1/2}m_\mathrm{e}v_\mathrm{e}}$ egyenlőtlenségből, ahol v_e az elektronok termikus sebességét jelöli. Az ekvipartíció-tétel alapján $v_\mathrm{e} = \sqrt{\dfrac{3kT_c}{m_\mathrm{e}}}$, a d_e tipikus távolságot kifejeztük a (22) egyenletben felírt elektronsűrűséggel, az M tömeget beírhatjuk a (21) egyenletből, és a T_c hőmérsékletet megadja a (20) formula. Ezeket a behelyettesítéseket mind elvégezve, rendezés után a következő egyenlőtlenséget kapjuk a csillag sugarára:

$$R \geq \frac{\varepsilon_0^{1/2}h^2}{2^{1/2}qm_\mathrm{e}^{3/4}m_\mathrm{p}^{5/4}G^{1/2}} = 6{,}9 \cdot 10^7\ \mathrm{m} = 0{,}10\,R_\odot.$$

Ezután a minimális tömeget a (21) egyenletből kaphatjuk meg:

$$M \geq 1{,}7 \cdot 10^{29}\ \mathrm{kg} = 0{,}09\, M_\odot.$$

6. Hélium-fúzió öregebb csillagokban

Jelölje v_{He} a hélium atommagok termikus sebességét. Két ütköző mag együttes $m_{\mathrm{He}} v_{\mathrm{He}}^2$ mozgási energiája megegyezik a $d_c = \dfrac{\lambda_{\mathrm{He}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{h}{\sqrt{2} m_{\mathrm{He}} v_{\mathrm{He}}}$ távolsághoz tartozó $\dfrac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0 d_c}$ potenciális energiával, ahonnan a hélium atommagok termikus sebessége

$$v_{\mathrm{He}} = \frac{\sqrt{2} q^2}{\pi \varepsilon_0 h} = 2{,}0 \cdot 10^6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ezután a hőmérséklet az ekvipartíció-tételből számolható ki:

$$T_{\mathrm{He}} = \frac{m_{\mathrm{He}} v_{\mathrm{He}}^2}{3k} = 6{,}5 \cdot 10^8\ \mathrm{K}.$$

Ez az érték nagyságrendileg egyezik a pontosabb csillagmodellek eredményével.