

I. rész

1. Legyen az A halmaz az a), a B halmaz a b) kifejezés értelmezési tartománya.

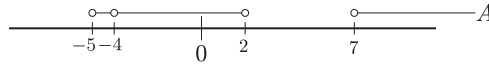
$$a) \quad \log_{x+5}(x^2 - 9x + 14), \quad b) \quad \sqrt{\frac{10-x}{x^2+4}}.$$

Ábrázoljuk számsíkján az $B \setminus A$ halmaz elemeit.

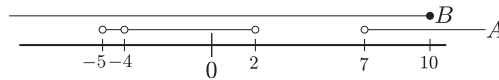
(11 pont)

Megoldás. Az a) részben szereplő kifejezés esetében a következő feltételeknek kell teljesülni: $x + 5 > 0$, $x + 5 \neq 1$ és $x^2 - 9x + 14 > 0$. Az első két feltételből $x > -5$ és $x \neq -4$. A másodfokú egyenlőtlenség zérushelyei: $x_1 = 2$, $x_2 = 7$, tehát az egyenlőtlenség megoldása: $x < 2$ vagy $x > 7$.

Mindent összevetve: $A =]-5; -4] \cup]-4; 2] \cup]7; \infty[$. Ezek után ábrázoljuk az A halmaz elemeit a számsíkján.



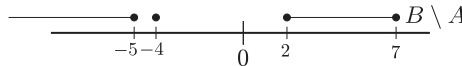
A b) részben szereplő kifejezés esetében a $\frac{10-x}{x^2+4} \geq 0$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Mivel e tört nevezője minden x -re pozitív, így az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha $10 - x \geq 0$, azaz $x \leq 10$. Vagyis: $B =]-\infty; 10]$. A B halmazt is ábrázoljuk a számsíkján.



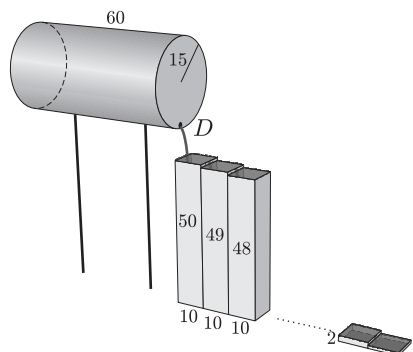
A $B \setminus A$ halmaz elemeit úgy kapjuk, hogy a B halmaz elemei közül kiveszünk minden olyan elemet, mely A -nak is eleme.

Tehát: $B \setminus A =]-\infty; -5] \cup \{-4\} \cup [2; 7]$.

Számsíkján ábrázolva:



2. Egy egyenes körhenger alakú zárt tartály alapkörének sugara 15 cm, magassága 60 cm. A tartályt vízszintes helyzetben két rúdra erősítették. A vízzel félig töltött tartály alján van egy D dugó (lásd ábra). Ha ezt kihúzzák, akkor a tartály alá helyezett egyenes hasáb alakú felül nyitott edényekbe folyik a víz. Minden hasáb alapszélessége 10 cm. Az első hasáb magassága 50 cm, a másodiké 49 cm, a harmadiké 48 cm és így tovább. Amikor az első hasáb megtelik, onnan átfolyik a másodikba, ha az is megtelik, akkor átfolyik a harmadikba stb.



Hány hasáb telik meg vízzel?

(12 pont)

Megoldás. A tartályban levő víz térfogata a tartály térfogatának a fele.

$$V_{\text{víz}} = \frac{r^2 \pi m}{2} = \frac{15^2 \pi \cdot 60}{2} \approx 21\,205,75.$$

Az edények térfogatát sorban kiszámoljuk: $V_{50} = 5000$, $V_{49} = 4900$, $V_{48} = 4800$, $V_{47} = 4700$, $V_{46} = 4600$, ... Mivel

$$5000 + 4900 + 4800 + 4700 = 19\,400 \quad \text{és} \quad 5000 + 4900 + 4800 + 4700 + 4600 = 24\,000,$$

azért 4 db edény (az 50, 49, 48 és 47 cm magas) telik meg vízzel.

3. A négyzetszámokat „csomagokba” helyezzük az alábbi módon:

1. csomag: (1),

2. csomag: (4, 9),

3. csomag: (16, 25, 36),

4. csomag: (49, 64, 81, 100), stb.

a) Melyik számmal kezdődik a 16. csomag?

b) Melyik csomagban szerepel a 8281 négyzetszám?

(14 pont)

Megoldás. a) Az első csomagban 1, a másodikban 2, a harmadikban 3, stb. ..., az n -edik csomagban n darab négyzetszám szerepel. Így a 16. csomagban szereplő első szám az előtte szereplő 15 csomagban levő összes négyzetszámot követő első négyzetszám. Az első 15 csomagban levő számok száma:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 15 = \frac{(1 + 15) \cdot 15}{2} = 120.$$

Ezek szerint a 16. csomag a 121. négyzetszámmal kezdődik, vagyis a csomagban szereplő első szám: $121^2 = 14\,641$.

b) A k -adik csomag első száma az előtte levő $k-1$ csomagban szereplő összes négyzetszámot követő első négyzetszám. Az első $k-1$ csomagban levő számok száma

$$1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2},$$

így a k -adik csomag a $\left(\frac{k(k-1)}{2} + 1\right)$ -edik négyzetszámmal, míg a $(k+1)$ -edik csomag a $\left(\frac{k(k+1)}{2} + 1\right)$ -edik négyzetszámmal kezdődik.

Ha a 8281 a k -adik csomagban van, akkor

$$\left[\frac{k(k-1)}{2} + 1\right]^2 \leq 8281 < \left[\frac{k(k+1)}{2} + 1\right]^2.$$

Vonjunk négyzetgyököt az egyenlőtlenség-láncolat tagjaiból:

$$\frac{k(k-1)}{2} + 1 \leq 91 < \frac{k(k+1)}{2} + 1, \quad \frac{k(k-1)}{2} \leq 90 < \frac{k(k+1)}{2},$$

$$k(k-1) \leq 180 < k(k+1).$$

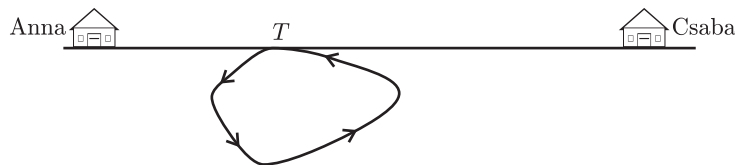
Az egyenlőtlenség-láncolat két szélén egy-egy szomszédos egész szám szorzata szerepel. Kevés próbálkozással – hogy ne kelljen a másodfokú egyenlőtlenségeket megoldanunk – megkapjuk, hogy

$$13 \cdot 12 = 156 \leq 180 < 13 \cdot 14 = 182.$$

Tehát $k = 13$, vagyis a 8281 a 13. csomagban szerepel.

Megjegyzés. Bár nem tartozott a feladathoz, de érdekességként számoljuk ki, hogy a 8281 a 13. csomagnak hányadik tagja. A 13. csomagban 13 négyzetszám van és – mint láttuk – a $\frac{13 \cdot 12}{2} + 1 = 79$ -edik négyzetszámmal kezdődik. Mivel a $8281 = 91^2$, tehát a 91. négyzetszám, így a 8281 négyzetszám a 13. csomag utolsó tagja.

4. Anna és Csaba háza egy egyenes út mentén található. Egy alkalommal megbeszélték, hogy együtt mennek kerékpározni. Déli 12 órakor a házaik közötti útszakasz egy olyan pontjában találkoztak, ahonnan egy biciklis körút indul.



Találkozásukkor Anna napi átlagsebesség-mérője 23 km/h, Csabáé pedig 28 km/h átlagsebességet jelzett. (Ezen a napon délig mindketten csak erre az útra használták a kerékpárjukat.) A 26 km-es körutat 1 óra alatt tették meg, ekkor a déli találkozási pontba visszaérve elbúcsúztak egymástól és mindketten hazamentek. A búcsúzásukkor Anna átlagsebesség-mérője 25 km/h-t, Csabáé 27 km/h-t mutatott. Milyen messze lakik egymástól Anna és Csaba? (14 pont)

Megoldás. Legyen S_a és t_a az Anna által a találkozásig megtett út, illetve a ráfordított idő. Ekkor átlagsebessége: $\frac{S_a}{t_a} = 23$, vagyis $S_a = 23t_a$. A találkozás után egy órát bicikliztek és 26 km utat tettek meg, így az átlagsebessége:

$$\frac{S_a + 26}{t_a + 1} = 25, \quad \text{azaz} \quad S_a + 26 = 25t_a + 25.$$

Felhasználva az előbb S_a -ra kapott kifejezést:

$$23t_a + 26 = 25t_a + 25, \quad \text{amiből} \quad 2t_a = 1, \quad \text{azaz} \quad t_a = \frac{1}{2}.$$

Ezzel számolva kapjuk, hogy $S_a = 23 \cdot \frac{1}{2}$. Tehát Anna a találkozásig 11,5 km utat tett meg.

Most számoljuk ki azt, hogy Csaba mekkora utat tett meg a találkozásig. Ha ez az út S_c , a ráfordított idő t_c , akkor átlagsebessége $\frac{S_c}{t_c} = 28$, vagyis $S_c = 28t_c$. Az egy órás körút megtétele után napi átlagsebessége:

$$\frac{S_c + 26}{t_c + 1} = 27, \quad \text{azaz} \quad S_c + 26 = 27t_c + 27.$$

Azt kaptuk Csaba esetében, hogy

$$28t_c + 26 = 27t_c + 27, \quad \text{ahonnan} \quad t_c = 1, \quad \text{továbbá} \quad S_c = 28.$$

Vagyis Csaba a találkozásig 28 km utat tett meg. Ezek szerint Anna és Csaba 39,5 km-re lakik egymástól.

II. rész

5. Egy svájci kantonban olyan lottójáték van forgalomban, melynél az első 50 pozitív egész számból kell 5-öt eltalálni. Egy szenvedélyes lottózó először kiválasztja az első két számot, majd harmadiknak az első kettő összegét, negyediknek az első három összegét, végül ötödiknek az első négy szám összegét.

a) Legfeljebb mekkorának választhatja ez az ember a legkisebb számot?

b) Ha emberünk a legkisebb számot a lehető legnagyobb választja, akkor mely számok szerepelhetnek a kitöltött szelvényén?

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy emberünknek telitalálata lesz, ha a fenti eljárásnak megfelelően minden lehetséges módon kitölt egy-egy szelvényt? (16 pont)

Megoldás. a) Legyen a kiválasztott két szám a és b ($a < b$). Ekkor a lottószelvényen megjátszott számok: a , b , $a + b$, $2a + 2b$, $4a + 4b$. Mivel a megjátszható legnagyobb szám 50, azért $4a + 4b \leq 50$, azaz $a + b \leq 12,5$. Mivel $a < b$, azért ez csak úgy lehetséges, ha $a \leq 5$. Tehát ilyen módon a megjátszható legkisebb szám legfeljebb 5 lehet.

b) Mivel a legkisebb megjátszható számok közül a legnagyobb 5, és $5 + b \leq 12$, azért a második szám értéke csak 6 vagy 7 lehet. Ezek szerint, ha emberünk a legkisebbnek kiválasztható számok közül a legnagyobbat, azaz az 5-öt választja, akkor az alábbi számokat játszhatja meg: 5, 6, 11, 22, 44 vagy 5, 7, 12, 24, 48.

c) Nézzük meg, hogy a kitöltési eljárás szerint hányfajta lottószelvényt lehet megjátszani.

Ha a legkisebb kiválasztott szám az 5, akkor – mint láttuk – két szelvényel lehet játszani.

Ha a legkisebb kiválasztott szám a 4, akkor a $4 + b \leq 12$ alapján b értékei: 8, 7, 6 vagy 5. Ezek szerint ekkor négy szelvényel lehet játszani.

Ha a legkisebb kiválasztott szám 3, akkor b lehetséges értékei: 9, 8, 7, 6, 5 vagy 4. Így ez esetben hat szelvényel lehet játszani.

Ha a kiválasztott legkisebb szám 2, akkor b lehetséges értékei: 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4 vagy 3. Vagyis ekkor nyolc szelvényel lehet játszani.

Ha a kiválasztott legkisebb szám 1, akkor b lehetséges értékei: 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 vagy 2. Vagyis ekkor tíz szelvényel lehet játszani.

Tehát: a megadott módon kitölthető lottószelvények száma: $2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$.

A kérdéses lottójátékban minden lehetséges módon kitölthető szelvények száma:

$$\binom{50}{5} = 2\,118\,760.$$

A megadott eljárással kitöltött összes szelvény között $\frac{30}{2\,118\,760} \approx 0,000\,014\,16$ a valószínűsége a telitalálatnak.

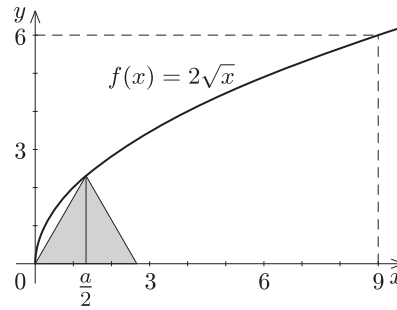
6. Adott a $[0; 9]$ intervallumon értelmezett $f(x) = 2\sqrt{x}$ függvény.

a) Egy szabályos háromszög egyik csúcsa az origó, egy másik csúcsa az x tengelyre, a harmadik csúcsa pedig az $f(x)$ függvény görbéjére illeszkedik. Mekkora e háromszög területe?

b) Egy téglalap egyik oldala az x tengelyre, egy másik oldala az $x = 9$ egyenesre, egy csúcsa pedig az $f(x)$ függvény görbéjére illeszkedik. Határozzuk meg a legnagyobb ilyen téglalap területét.

c) Az $f(x)$ függvénygörbe és az x tengely közötti területet az $x = a$ egyenes felezi. Határozzuk meg az a paraméter értékét. (16 pont)

Megoldás. a) Ha a szabályos háromszög a oldalú, akkor az $x = \frac{a}{2}$ helyen felvett függvényérték egyenlő kell legyen e háromszög magasságával (1. ábra).



1. ábra

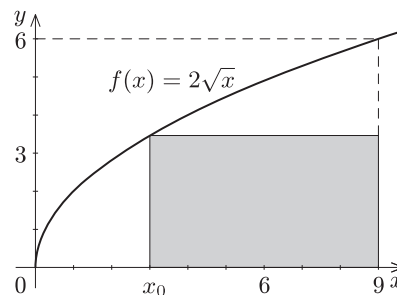
Tehát

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{2}}, \quad \text{azaz} \quad \frac{3a^2}{4} = \frac{4a}{2},$$

ahonnan az egyedüli pozitív megoldás: $a = \frac{8}{3}$. A háromszög területe:

$$T = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{64}{9}\sqrt{3} = \frac{16\sqrt{3}}{9} \approx 3,08.$$

b) Legyen a téglalap egyik oldala az $x = x_0$ egyenesen. Ekkor a téglalap oldalainak hossza $9 - x_0$ és $2\sqrt{x_0}$, ahol $0 < x_0 < 9$ (2. ábra).



2. ábra

Ekkor a téglalap területe az x_0 függvényében:

$$T(x_0) = 2\sqrt{x_0} \cdot (9 - x_0) = 18\sqrt{x_0} - 2\sqrt{x_0^3}.$$

E függvénynek akkor lehet szélsőértéke, ha a deriváltja 0.

$$T'(x_0) = 18 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_0}} - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x_0} = \frac{9}{\sqrt{x_0}} - 3\sqrt{x_0} = 0, \quad \text{azaz} \quad \frac{9}{\sqrt{x_0}} = 3\sqrt{x_0},$$

ahonnan $x_0 = 3$. A $T'(x) = \frac{9}{\sqrt{x}} - 3\sqrt{x}$ függvény $x = 3$ -ban előjelet váltva 0, hiszen $x < 3$ esetén $T'(x) > 0$, $x > 3$ esetén pedig $T'(x) < 0$. Mindez azt jelenti, hogy a $T(x)$ függvénynek $x = 3$ -ban valóban szélsőértéke, mégpedig maximuma van.

Tehát a beírható legnagyobb területű téglalap területe: $2\sqrt{3} \cdot (9 - 3) = 12\sqrt{3}$.

c) Ha az $x = a$ egyenes felezi a függvénygörbe és az x tengely közötti területet, akkor

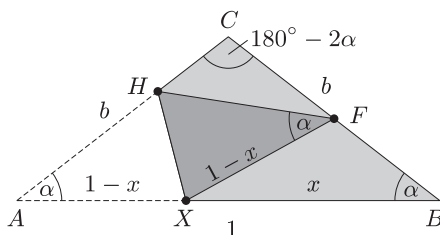
$$2 \cdot \int_0^a 2\sqrt{x} dx = \int_0^9 2\sqrt{x} dx, \quad \text{azaz} \quad 2 \cdot \int_0^a \sqrt{x} dx = \int_0^9 \sqrt{x} dx.$$

$$2 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} \right]_0^a = \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right]_0^9, \quad \text{tehát} \quad \frac{4}{3} \cdot \sqrt{a^3} = \frac{2}{3} \cdot 27, \quad \text{azaz} \quad \sqrt{a^3} = \frac{27}{2},$$

ahonnan kapjuk az a paraméter értékét:

$$a = \frac{9}{\sqrt[3]{4}} \approx 5,67.$$

7. Egy óbudai vendéglőben az egyenlő szárú háromszög alakú szalvétákat úgy hajtogatják, hogy az ABC háromszög AB alapjának A csúcsa a BC szár F felezőpontjába kerüljön. Ekkor a hajtás élének egyik végpontja az AC szár C -hez közelebbi H harmadoló pontjába kerül.



Hová kerül a hajtás élének másik (X) végpontja?

(16 pont)

Megoldás. Legyen az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapja egységnyi, szárai pedig b hosszúak, és legyen a BX szakasz hossza x . A hajtogatás miatt $AX = XF = 1 - x$. Ha az ABC háromszög alapján levő szögek nagysága α , akkor $\angle ACB = 180^\circ - 2\alpha$.

Írjuk föl először a HFC háromszög HF oldalára a koszinusztételt. Mivel $HC = \frac{1}{3}b$, $HF = \frac{2}{3}b$, $FC = \frac{1}{2}b$, azért

$$\left(\frac{2}{3}b\right)^2 = \left(\frac{1}{3}b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}b \cdot \frac{1}{2}b \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha).$$

Innen

$$\cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = -\cos^2 \alpha + 1 - \cos^2 \alpha = 1 - 2\cos^2 \alpha,$$

azért azt kapjuk, hogy

$$\frac{4b^2}{9} = \frac{b^2}{9} + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{3} + \frac{2b^2}{3} \cos^2 \alpha, \quad \text{azaz} \quad \frac{4}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos^2 \alpha,$$

ahonnan $\cos^2 \alpha = \frac{5}{8}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ (negatív nem lehet, mert α hegyesszög).

Az ABC háromszögben pedig:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{b} = \frac{1}{2b}, \quad \text{így} \quad \frac{1}{2b} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \quad \text{vagyis} \quad b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$

Most írjuk fel a koszinusztételt az FBX háromszög FX oldalára is.

$$(1-x)^2 = x^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}\right)^2 - 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \cdot \cos \alpha,$$

$$1 - 2x + x^2 = x^2 + \frac{1}{10} - 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}},$$

$$\frac{9}{10} - 2x = -\frac{x}{2}, \quad \text{azaz} \quad \frac{9}{10} = \frac{3}{2}x, \quad \text{ahonnan} \quad x = \frac{3}{5}.$$

Azt kaptuk, hogy az ABC háromszög AB alapján $BX = \frac{3}{5}$, $AX = \frac{2}{5}$, tehát a hajtás szélének másik végpontja az AB oldalnak az A csúcsához közelebbi 3 : 2 arányú osztópontja lesz.

8. Karcsi meglátott a kirakatban egy igen kedvező árú sportcipőt. Bement, hogy megvásárolja, de legnagyobb megdöbbenésére a pénztárnál a kirakatban látott ár négyszeresét akarták fizettetni vele. Kiderült, hogy a kirakatrendező a cipő árát jelző négyjegyű szám számjegyeit véletlenül fordított sorrendben írta ki. Mennyibe került a sportcipő? (16 pont)

Megoldás. Ha a cipő ára \overline{abcd} négyjegyű szám, akkor Pisti a kirakatban a \overline{dcba} négyjegyű számot látta. A feltételek szerint $\overline{abcd} = 4 \cdot \overline{dcba}$. A kapott egyenlőség jobb oldalán páros szám áll, így a bal oldalnak is párosnak kell lennie, azaz d páros számjegy. Az is biztos, hogy $d \leq 2$. Ha ugyanis $d > 2$ lenne, akkor az egyenlet jobb oldalán már ötjegyű szám szerepelne, ami nem lehet egyenlő egy négyjegyű számmal. Mindebből az következik, hogy csak a $d = 2$ lehetséges. Ekkor $\overline{abc2} = 4 \cdot \overline{2cba}$.

Most azt látjuk, hogy az egyenlet jobb oldalának értéke 8000-nél nagyobb. Ez azt jelenti, hogy a értéke 8 vagy 9. Mivel a jobb oldali szám utolsó jegyét, az a -t 4-gyel kell szorozni, és ennek a szorzatnak az utolsó jegye 2 lesz (a bal oldalon 2 az utolsó jegy), ezért csak $a = 8$ lehet. Vagyis $\overline{8bc2} = 4 \cdot \overline{2cb8}$.

Írjuk ki részletesen ez utóbbi egyenletet:

$$8000 + 100b + 10c + 2 = 4 \cdot (2000 + 100c + 10b + 8),$$

$$8002 + 100b + 10c = 8032 + 400c + 40b,$$

$$60b = 30 + 390c,$$

$$2b = 1 + 13c.$$

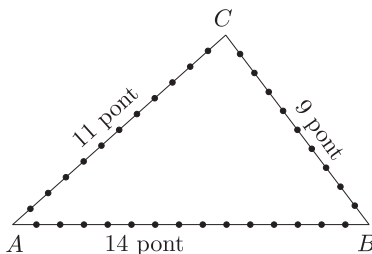
Mivel a kapott egyenlet bal oldalának értéke legfeljebb 18, ezért a jobb oldalon c értéke csak 1 lehet ($c = 0$ nem lehetséges, hiszen ekkor b -re nem kapnánk egész számot). Ha $c = 1$, akkor $2b = 14$, ahonnan $b = 7$.

Azt kaptuk tehát, hogy $a = 8$, $b = 7$, $c = 1$, $d = 2$. A cipő ára 8712 Ft. (A kirakatban 2178 Ft szerepelt, és valóban: $8712 = 4 \cdot 2178$.)

9. a) Az ABC háromszög oldalai 10, 12 és 15 cm hosszúak. Az oldalakon (az oldalak végpontjait kivéve) minden egész cm helyen megjelöltük a pontokat. Ezután képeztük az összes olyan háromszöget, melynek csúcspontjai a megjelölt pontok közül valók. Hány darab ilyen háromszöget képezhetünk?

b) A PQR szabályos háromszög oldalai n cm hosszúak, ahol $n > 2$ egész szám. Az oldalakon (az oldalak végpontjait kivéve) minden egész cm helyen megjelöltük a pontokat. Ezután képeztük az összes olyan háromszöget, melynek csúcspontjai a kijelölt pontok közül valók, majd képeztük az összes olyan négyszöget, melynek két csúcsa egy oldalon, másik két csúcsa pedig a háromszög másik, illetve a harmadik oldalának kijelölt pontjai közül való. Miből van több: háromszögből vagy négyszögből? (16 pont)

Megoldás. a) Ha a háromszög oldalainak egész értékeinél (a végpontokat kivéve) helyeztünk el egy-egy pontot, akkor a háromszög egyes oldalain elhelyezett pontok száma 14, 11 és 9. Legyen $AB = 15$, $BC = 10$ és $AC = 12$.



Ha a háromszög két csúcsát az AB oldalról választottuk, akkor ezt $\binom{14}{2}$ -féleképpen tehetjük meg. Ekkor a harmadik pont vagy az AC oldalon, vagy a BC oldalon van, így a harmadik pont választására 20 lehetőségünk van, tehát a háromszögek szám: $20 \cdot \binom{14}{2}$.

Hasonlóképpen adódik a háromszögek száma, ha a háromszög két csúcsát az AC oldalról választjuk: $23 \cdot \binom{11}{2}$. Ha pedig a BC oldalról választjuk a két pontot, akkor a háromszögek száma: $25 \cdot \binom{9}{2}$. Ha mindhárom oldalról egy-egy csúcsot választunk, akkor a háromszögek száma: $14 \cdot 11 \cdot 9$. Összeadva:

$$\binom{14}{2} \cdot 20 + \binom{11}{2} \cdot 23 + \binom{9}{2} \cdot 25 + 14 \cdot 11 \cdot 9 = 5371.$$

Tehát a képezhető háromszögek száma 5371.

b) Az n oldalú ($n > 2$) szabályos háromszög minden oldalán $n - 1$ db pontot jelöltünk meg. Számoljuk össze a képezhető háromszögek és négyszögek számát.

Kezdjük a háromszögekkel. Ha valamelyik oldalra két csúcsot teszünk, akkor azt $\binom{n-1}{2}$ -féleképpen választhatjuk ki. A harmadik csúcs valamelyik másik oldalon kell, hogy legyen, vagyis $2(n-1)$ pont közül választható. Azt az oldalt, amelyiken két csúcs lesz, háromféleképpen választhatjuk ki, így e háromszögek száma:

$$3 \cdot 2 \cdot \binom{n-1}{2} \cdot (n-1) = 3 \cdot (n-2)(n-1)^2.$$

Az olyan háromszögek száma, ahol mindhárom csúcs különböző oldalon van: $(n-1)^3$. Tehát az összes képezhető háromszögek száma: $3(n-2)(n-1)^2 + (n-1)^3$.

Most számoljuk össze a képezhető négyszögeket. Arról az oldalról, melyen a négyszögnek két csúcsa van a csúcsokat $\binom{n-1}{2}$ -féleképpen választhatjuk ki. A másik két csúcs közül egy-egy a másik két oldalon van. Mivel a kétcsúcsú oldalt 3-féleképpen választhatjuk ki, ezért az összes képezhető négyszögek száma

$$3 \cdot \binom{n-1}{2} \cdot (n-1)^2 = 3 \cdot \frac{(n-2)(n-1)^3}{2}.$$

Vizsgáljuk meg, milyen n -re lesz több négyszög, mint háromszög. Tekintsük az alábbi egyenlőtlenséget:

$$3 \cdot \frac{(n-2)(n-1)^3}{2} \geq 3(n-2)(n-1)^2 + (n-1)^3,$$

$$3 \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{2} \geq 3(n-2) + n-1,$$

$$3(n^2 - 3n + 2) \geq 8n - 14,$$

$$3n^2 - 17n + 20 \geq 0.$$

A kapott másodfokú kifejezés zérushelyei:

$$n_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{6} = \frac{17 \pm 7}{6}, \quad \text{azaz} \quad n_1 = \frac{5}{3}, \quad n_2 = 4.$$

Tehát az egyenlőtlenség megoldása: $n \leq \frac{5}{3}$ vagy $n \geq 4$.

A következőre jutottunk: ha $n = 3$, akkor háromszögből van több; ha $n = 4$, akkor ugyanannyi háromszög képezhető, mint négyszög, végül, ha $n > 4$, akkor négyszögből több van, mint háromszögből.