

A népszerű TOTÓ játékban 13+1 focimeccs eredményét kell megtippelni. Nem a pontos végeredményt kell eltalálni, hanem csak azt, hogy a két csapat közül melyik nyer. Ha az otthon játszó csapat győz, akkor a helyes tipp 1, ha a vendégcsapat, akkor 2, ha pedig a meccs döntetlen, akkor  $x$ . A 14. meccs eredményét csak akkor vesszük figyelembe, ha az első 13 meccs mindegyikére helyes tippet adtunk. A játék szervezője minden héten kijelöli azokat a meccseket, melyek kimenetelére tippelni kell. A játék résztvevői tippeket, azaz az 1, 2,  $x$  jelekből álló 13 + 1 hosszú sorozatokat készítenek. Minden tippért egy előre meghatározott összeget fizetnek a szervezőnek (a magyarországi játékban jelenleg 40 Ft-ot). Miután lejátszották a meccseket, a szervező a tippekért beszedett pénz egy részét (Magyarországon kb. 50% -át) kiosztja azon játékosok közt, akik a legpontosabb előrejelzéseket adták. Általában a telitalálattal, tehát ha valaki mind a 14 meccs kimenetelét eltalálta, jelentős összeget lehet nyerni, 10-nél kevesebb találatért viszont már nem jár pénz. (A cikk írását megelőző hétvégén, 2007. április 1-jén pl. a 13 + 1, 13, 12, 11 és 10 találatos szelvények nyereménye rendre 347 582, 95 065, 4 440, 508 és 170 Ft volt.) Miután a szervező a játékosok által befizetett pénznek csak egy részét osztja szét nyereményként, ezért nyilván érdemesebb szervezőnek lenni, mint játékosnak. Ezen a módon azonban Magyarországon nem nyerhetünk a TOTÓ-n, mert a szervezés állami monopólium. Játékosként több lehetőség kínálkozik. Megpróbálhatunk némi pénzt adni az egyes csapatok csatárainak, hogy játsszanak az átlagosnál jobban, esetleg néhány kapust próbálhatunk arra rávenni, hogy játsszon a szokásosnál gyengébben, vagy némelyik bírót kérhetjük meg arra, hogy érdekeinknek megfelelően fújjon. Ezek azonban sportszerűtlen dolgok. Ebben a cikkben arra mutatunk néhány módszert, hogy ha a mérkőzések lehetséges kimenetelei egyforma valószínűségűek, akkor hogyan érhetünk el biztosan előre meghatározott számú találatot a lehető legkevesebb tippel.

A továbbiakban a döntetlen kimenetelt  $x$  helyett 0-val jelöljük. Feladatunkat tehát kicsit általánosabb formában a következőképp fogalmazhatjuk meg:

*Legyenek  $n$  és  $k$  rögzített természetes számok. Tekintsük az  $n$  hosszú 0, 1, 2 jegyekből álló sorozatok  $\mathcal{E}_n$  halmazát. Adjuk meg azt a lehető legkisebb elemszámú  $\mathcal{T} \subset \mathcal{E}_n$  részhalmazt, melyre igaz, hogy  $\mathcal{E}_n$  bármely  $\mathbf{e}$  eleméhez van olyan  $\mathcal{T}$ -beli  $\mathbf{t}$  elem, amely  $\mathbf{e}$ -től legfeljebb  $(n - k)$  helyen tér el.*

Áttérve a matematikában szokásos elnevezésekre és jelölésekre,  $\mathcal{E}_n$  elemeit vektoroknak, az  $\mathbf{e} \in \mathcal{E}_n$  sorozat  $i$ -edik elemét,  $e_i$ -t pedig a vektor  $i$ -edik koordinátájának ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) nevezzük, és az

$$\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

jelölést használjuk.

## 2. A Hamming-távolság

Azt, hogy egy tippben hány hiba van, az adja meg, hogy hány olyan koordinátája van a tippvektornak, ami eltér az eredményvektor megfelelő koordinátájától. Ezért természetes módon adódik a következő definíció az  $\mathcal{E}_n$ -beli elemek egymástól való eltérésének mérésére:

**Definíció.** Az

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{és} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$\mathcal{E}_n$ -beli elemek Hamming-távolsága,  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  azon  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  indexek száma, melyekre  $x_i \neq y_i$  teljesül.

Az így mért eltérést azért nevezik távolságnak, mert rendelkezik a geometriából ismert „szokásos” távolság legfontosabb tulajdonságaival. Ezeket a következő állításban foglaljuk össze.

**1. állítás.** Tetszőleges  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  vektorok Hamming-távolságára

1.  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ , és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .
2.  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ .
3.  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq d(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ .

(Állításunkat röviden úgy mondják, hogy az  $\mathcal{E}_n$  halmaz a  $d$  Hamming-távolsággal ellátva metrikus teret alkot.)

**Bizonyítás.** Az 1. és a 2. állítás nyilvánvalóan adódik a definícióból. A 3. állítást háromszög-egyenlőtlenségnek nevezik, mert formálisan megegyezik az elemi geometriából ismert, ugyanígy nevezett állítással. Ha  $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = m$ , akkor pontosan  $m$  darab olyan koordinátája van  $\mathbf{x}$ -nek és  $\mathbf{z}$ -nek, amelyek különböznek. Tekintsük  $\mathbf{y}$ -nak az ugyanilyen indexű koordinátáit. Ezek mindegyike  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{z}$  megfelelő koordinátái közül legfeljebb az egyikkel egyezik meg, azaz legalább az egyiktől különbözik. Tehát ha csak ezeket a koordinátákat nézzük, már akkor is összesen legalább  $m$  eltérés lesz  $\mathbf{y}$  és  $\mathbf{x}$ , illetve  $\mathbf{y}$  és  $\mathbf{z}$  közt. Attól függően, hogy a további  $n - m$  koordinátában van vagy nincs eltérés, lesz az állításban szigorú egyenlőtlenség, illetve egyenlőség.  $\square$

A távolság segítségével a „szokásos” módon definiálhatjuk a gömböket.

**Definíció.** Adott  $\mathbf{c} \in \mathcal{E}_n$  vektor és  $0 \leq r$  egész szám esetén  $\mathbf{c}$  középpontú  $r$  sugarú gömbnek nevezzük és  $B(\mathbf{c}, r)$ -rel jelöljük azon  $\mathcal{E}_n$ -beli elemek halmazát, melyeknek  $\mathbf{c}$ -től való Hamming-távolsága legfeljebb  $r$ . Azaz:

$$B(\mathbf{c}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_n : d(\mathbf{c}, \mathbf{x}) \leq r\}.$$

Az, hogy egy gömb hány vektort tartalmaz, csak a gömb sugarától függ.

**2. állítás.** Tetszőleges középpont körüli  $r \leq n$  sugarú gömb pontosan

$$\sum_{i=0}^r \binom{n}{i} \cdot 2^i$$

vektort tartalmaz az  $\mathcal{E}_n$  halmazból.

**Bizonyítás.** Ha a gömb középpontja  $\mathbf{e}$ , akkor a gömb azokat a vektorokat tartalmazza, amelyek legfeljebb  $r$  koordinátában térnek el  $\mathbf{e}$ -től. Ha egy vektor pontosan  $i$  koordinátában különbözik  $\mathbf{e}$ -től, akkor  $\binom{n}{i}$ -féleképp tudjuk kiválasztani ezt az  $i$  darab koordinátát, s minden egyes koordináta helyére egymástól függetlenül azt a 2-2 koordinátát írhatjuk, amelyek különböznek  $\mathbf{e}$  megfelelő koordinátáitól.  $\square$

Ha az  $n$  meccset tartalmazó TOTÓ-ban azt szeretnénk, hogy legalább  $k$  találatunk legyen, akkor olyan  $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_m\}$  tippalmazt kell megjátszanunk, amelyre a  $\mathbf{t}_i$  középpontú  $(n - k)$  sugarú gömbök uniója tartalmazza a teljes  $\mathcal{E}_n$  halmazt. Ha ugyanis ez teljesül, akkor tetszőleges  $\mathbf{e}$  eredmény esetén lesz olyan  $\mathbf{t}_i$  tippünk, amelyre  $d(\mathbf{t}_i, \mathbf{e}) \leq n - k$ , azaz tippünk a helyes eredménnyel legalább  $n - (n - k) = k$  koordinátában megegyezik.

Ebből az észrevételből azonnal adódik következő tételünk, melyet *gömbpakolási korlátnak* neveznek:

**3. tétel.** Ha az  $n$  meccset tartalmazó TOTÓ-ban a  $\mathcal{T}$  tippalmazsal biztosan elérünk legalább  $k$  találatot, akkor a tippalmaz  $|\mathcal{T}|$  elemszámára teljesülnie kell a

$$|\mathcal{T}| \geq \frac{3^n}{\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} \cdot 2^i}$$

egyenlőtlenségnek.

**Bizonyítás.** A 2. állítás szerint minden  $(n - k)$  sugarú gömb

$$\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} \cdot 2^i$$

vektort tartalmaz. Mivel a tippek körüli gömbök uniójának tartalmaznia kell  $\mathcal{E}_n$ -t, ezért ha ezt a számot megszorozzuk a tippek számával, akkor eredményül legalább  $\mathcal{E}_n$  elemszámát, azaz  $3^n$ -t kell kapnunk.  $\square$

### 3. Jó tippalmazok

Nézzünk meg először két triviális esetet. Ha biztos telitalálatot szeretnénk elérni, akkor  $k = n$ . Tehát a tippjeink körüli 0 sugarú gömbök uniójának, azaz maguknak a tippek halmazának tartalmaznia kell  $\mathcal{E}_n$ -t. Vagyis biztos telitalálatot csak akkor érhetünk el, ha minden lehetőséget megjátszunk. (Ezt persze Hamming-távolság és gömbök nélkül is tudtuk.) Mit kell tennünk, ha az  $n = 13$  meccsből álló játékban biztos 5 találatot szeretnénk elérni? Legyen  $\mathbf{t}_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) az a tipp, amelynek minden koordinátája  $i$ . Ezzel a három tippel biztosan elérünk legalább 5 találatot, ugyanis minden 13 hosszú vektornak van legalább 5 darab egyenlő koordinátája, hiszen ha egy vektor mindhárom lehetséges koordinátából legfeljebb 4-et tartalmazna, akkor hossza legfeljebb  $3 \times 4 = 12$  lenne. Gömbökkel megfogalmazva állításunkat:

$$\bigcup_{i=0}^2 B(\mathbf{t}_i, 8) \supset \mathcal{E}_{13}.$$

A TOTÓ-ban azonban az 5 találatos szelvénnel nem lehet nyerni. Nyereményt általában csak a meccsek számával majdnem megegyező találatszámra fizetnek. Vagyis az érdekes tippalmazok azok, melyekre  $(n - k)$  értéke kicsi. A továbbiakban bevezetjük az  $n - k = r$  jelölést. Ekkor a  $0 < r \leq n$  szám azt adja meg, hogy legfeljebb hány meccs eredményét hibázhatjuk el. Nagy  $n$  értékekre a jó tippalmazok megadása nagyon nehéz feladat, még akkor sincs a probléma csak néhány  $n$ -re megoldva, ha  $r = 1$ . A következő táblázatban összefoglaljuk az ismert eredményeket  $n \leq 13$  és  $r = 1, 2, 3$  esetén. Az  $n$ -nel jelölt sor és az  $r$ -rel jelölt oszlop kereszteződésében álló első szám a legjobb ismert tippalmaz elemszáma, az utána zárójelben szereplő szám pedig az optimális tippalmaz méretére vonatkozó legjobb alsó becslés. Ha nincs zárójelbe írt szám, akkor az azt jelenti, hogy a konstrukció optimális, azaz be van bizonyítva, hogy kevesebb tippel nem érhető el a kívánt találatszám. A zárójelben lévő becslés legtöbbször a 3. tételben szereplő gömbpakolási korlátból következik, néhány esetben azonban jobb annál.

| $n \setminus r$ | 1               | 2           | 3          |
|-----------------|-----------------|-------------|------------|
| 2               | 3               | 1           |            |
| 3               | 5               | 3           | 1          |
| 4               | 9               | 3           | 3          |
| 5               | 27              | 8           | 3          |
| 6               | 73 (63)         | 17 (12)     | 6          |
| 7               | 186 (150)       | 34 (26)     | 12 (7)     |
| 8               | 486 (393)       | 81 (52)     | 27 (13)    |
| 9               | 1356 (1048)     | 219 (128)   | 54 (25)    |
| 10              | 3645 (2818)     | 558 (323)   | 108 (57)   |
| 11              | 9477 (7767)     | 729         | 243 (115)  |
| 12              | 27 702 (21 395) | 2187 (1919) | 729 (282)  |
| 13              | 59 049          | 6561 (5062) | 1215 (609) |

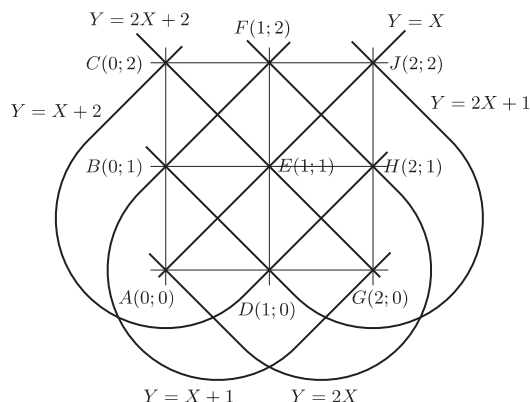
Látható, hogy  $5 \leq n$  esetén csak az  $n = 11, r = 2$  és az  $n = 13, r = 1$  párok esetén éri el a legjobb ismert konstrukció a gömbpakolási korlátból következő lehető legkisebb elemszámot. Ezekben az esetekben a konstrukciók kódelméletiek. Ezekről részletesen olvashatunk *Hraskó András* és *Szőnyi Tamás* [2] cikkében. Némelyik tippthalmaz (kicsi  $n$  értékekre) a cikk végén található feladatok segítségével állítható elő. Érdekes azt is megfigyelnünk, hogy 13 meccs esetén a biztos 12 találat eléréséhez 59 049 tippre van szükségünk, ami jelenleg 2 361 960 Ft-ba kerül. Ezt összehasonlítva a korábban említett nyereménnyel (4 440 Ft), látható hogy sajnos a TOTÓ-val sem lehet biztosan meggazdagodni.

A most következő példában  $n = 4$  és  $r = 1$  esetén adjuk meg az egyik optimális konstrukciót, ami a harmadrendű véges affin sík tulajdonságait használja. A véges affin síkokról részletesen olvashatunk a lapunk 2006. decemberi számában megjelent [3] cikkben, vagy a [4] könyvben. Most csak a továbbiakban  $\mathcal{H}$ -val jelölt harmadrendű affin sík legfontosabb tulajdonságait foglaljuk össze.

$\mathcal{H}$ -t legegyszerűbben egy derékszögű koordináta-rendszerrel ellátott klasszikus euklidészi sík mintájára képzelhetjük el, csak most a valós számok helyett a  $\{0; 1; 2\}$  halmaz elemeivel koordinátázunk és modulo 3 számolunk. Legyenek  $\mathcal{H}$  pontjai az olyan rendezett  $(a, b)$  párok, ahol  $a, b \in \{0; 1; 2\}$  (a klasszikus esetben a sík pontjai a valós számokból készített rendezett pároknak felelnek meg). Az egyenesek kétfélék: egyrészt az  $[m, d]$  típusú rendezett párok, ahol  $m, d \in \{0; 1; 2\}$ , másrészt a  $[c]$  típusú elemek, ahol  $c \in \{0; 1; 2\}$  (a klasszikus esetben a sík nem függőleges egyenesei egyértelműen megadhatók  $m$  meredekségükkel és azzal a  $(0, d)$  ponttal, ahol az  $Y$  tengelyt metszik, míg a függőleges egyenesek egyértelműen leírhatók azzal a  $(c, 0)$  ponttal, ahol az  $X$  tengelyt metszik). Két egyenesre azt mondjuk, hogy *párhuzamosak*, ha mindkettő  $[c]$  típusú, vagy ha mindkettő  $[m, d]$  típusú és a két egyeneshez tartozó  $m$  értékek megegyeznek. Az  $(a, b)$  pont akkor és csak akkor van rajta az  $[m, d]$  egyenesen, ha teljesül, hogy

$$b \equiv ma + d \pmod{3}$$

(azaz az  $ma + d$  szám 3-mal osztva  $b$ -t ad maradékul), a  $[c]$  egyenesen pedig pontosan akkor, ha  $a = c$ . A klasszikus esethez hasonlóan azt mondjuk, hogy az  $[m, d]$  egyenes egyenlete  $Y = mX + d$ , illetve a  $[c]$  egyenes egyenlete  $X = c$ . A síkon tehát  $3 \cdot 3 = 9$  pont és  $3 \cdot 3 + 3 = 12$  egyenes van. Az ábrán  $\mathcal{H}$  pontjai koordinátáikkal, egyenesei pedig (amik persze az ábrán nem rajzolhatók meg úgy, mint az euklidészi sík egyenesei) egyenletükkel együtt szerepelnek.



Az ábra alapján is könnyen ellenőrizhetjük, hogy  $\mathcal{H}$  rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- Bármely két különböző pontnak egyértelműen létezik összekötő egyenese.
- $\mathcal{H}$  minden egyenesén 3 pont van és minden ponton át 4 egyenes megy.

- Ha a sík  $P$  pontja nincs rajta a sík  $e$  egyenesén, akkor  $P$ -n át pontosan egy  $e$ -vel párhuzamos egyenes megy. A sík egyenesei párhuzamossági osztályokba sorolhatók úgy, hogy két egyenes pontosan akkor van egy osztályban, ha párhuzamosak. Minden osztályban 3 darab egyenes van, a sík minden pontján át minden osztályból pontosan egy egyenes megy.

A tippeket a  $\mathcal{H}$  sík pontjainak feleltetjük meg. Minden  $P$  ponthoz hozzárendelünk egy négy hosszú vektort, melynek minden koordinátája 0, 1 vagy 2, a következő módon: Tekintsük a sík  $P$ -n átmenő négy egyenesét. Ezek közül pontosan egy-egy tartozik a sík mind a négy párhuzamossági osztályába. Ha az egyenesek egyenlete rendre

$$X = c, \quad Y = d, \quad Y = X + e \quad \text{és} \quad Y = 2X + f,$$

akkor a  $P$ -hez rendelt vektor legyen

$$P \mapsto \mathbf{p} = (c, d, e, f).$$

(Tehát az ábrán látható  $D(1;0)$  ponthoz a  $\mathbf{d} = (1;0;2;1)$  vektort rendeljük, mert a  $D$ -n átmenő egyenesek egyenletei  $Y = 1$ ,  $X = 0$ ,  $Y = X + 1$  és  $Y = 2X + 1$ .)

Ha  $P$  és  $Q$  a sík két különböző pontja, akkor a hozzájuk rendelt két vektornak,  $\mathbf{p}$ -nek és  $\mathbf{q}$ -nak pontosan egy koordinátája egyezik meg, hiszen a síkon a két pontnak egyértelműen létezik összekötő egyenes. Vagyis a két vektor Hamming-távolsága  $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 3$ . Ez viszont azt jelenti, hogy ha a sík pontjaihoz rendelt vektorok köré 1 sugarú gömböket írunk, akkor azoknak nem lesz közös pontjuk. Ha ugyanis  $\mathbf{k}$  ilyen lenne, akkor a háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva a

$$3 = d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq d(\mathbf{p}, \mathbf{k}) + d(\mathbf{q}, \mathbf{k}) \leq 1 + 1 = 2$$

nyilvánvaló ellentmondást kapnánk.

Minden gömb  $1 + 4 \cdot 2 = 9$  vektort tartalmaz, tehát a sík 9 pontjához tartozó gömbök összesen  $9 \cdot 9 = 81 = 3^4$  vektort, vagyis az  $\mathcal{E}_4$  halmaz minden elemét tartalmazzák. Ezért a 4 meccsből álló TOTÓ-ban biztos 3 találatot érhetünk el az alábbi tipporozattal (a vektorokat a harmadrendű sík pontjaihoz az ábrán látható jelöléseknek megfelelően rendeltük):

|       |                |
|-------|----------------|
| $A :$ | $(0; 0; 0; 0)$ |
| $B :$ | $(0; 1; 1; 1)$ |
| $C :$ | $(0; 2; 2; 2)$ |
| $D :$ | $(1; 0; 2; 1)$ |
| $E :$ | $(1; 1; 0; 2)$ |
| $F :$ | $(1; 2; 1; 0)$ |
| $G :$ | $(2; 0; 1; 2)$ |
| $H :$ | $(2; 1; 2; 0)$ |
| $J :$ | $(2; 2; 0; 1)$ |

## Feladatok

1. Adjunk meg  $n = 2$  esetén 3 tippet, melyekkel biztos 1 találatot érünk el. Mutassuk meg, hogy 2 tipp esetén előfordulhat, hogy 0 találatunk lesz.

2. Adjunk meg  $n = 4$  esetén 3 tippet, melyekkel biztos 2 találatot érünk el. (Gondoljunk arra, hogyan kell 13 meccs esetén biztos 5 találatot csinálni.)

3. Az  $n = 3$  esetben, ha biztos 2 találatot szeretnénk elérni, akkor a gömbpakolási korlátból azt kapjuk, hogy ehhez legalább 4 tippre van szükségünk (mert  $21 = 3(1 + 3 \cdot 2) < 2^3 < 4(1 + 3 \cdot 2) = 28$ ). Mutassuk meg, hogy ekkor a gömbpakolási korlát nem éles, azaz legalább 5 tippre van szükségünk a biztos 2 találat eléréséhez.

4. Adjunk meg 27 tippet, amelyekkel biztos 4 találatot érünk el az 5 meccset tartalmazó játékban.

5. Bizonyos esetekben a meccsek kétesélyesek (azaz feltételezzük, hogy a három lehetséges eredmény közül az egyik biztosan nem fog bekövetkezni). Ilyenkor 0–1 sorozatokkal modellezhetjük a tippeket. Hogyan szól  $n$  darab kétesélyes meccs esetén a 3. tételben szereplő gömbpakolási korlát megfelelője? Adjunk meg olyan 16 elemű tippalmazt a 7 kétesélyes meccsből álló játékban, amellyel biztos 6 találatot érünk el.

## Irodalomjegyzék

- [1] Härmäläinen, H., Honkala, I., Lytsin, S. és Östergård, P.: *Football Pools – A Game for Mathematicians*, American Math. Monthly (August–Sept. 1995), 579–588.
- [2] Hraskó A. és Szőnyi T.: *Hibajavító kódok*, Új matematikai mozaik (szerk. Hraskó A.), Typotex Kiadó (Budapest, 2002), 139–170.
- [3] Kiss Gy.: *Hogyan szervezzünk körmérkőzéses focibajnokságot?* KöMaL, **56** (2006), 514–525.
- [4] Kiss Gy. és Szőnyi T.: *Véges geometriák*, Polygon Könyvkiadó (Szeged, 2001).