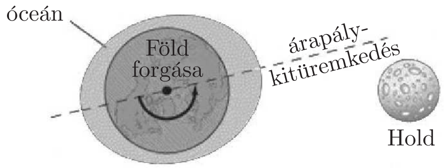
1. feladat. A Föld–Hold rendszer fejlődése[1]

A tudósok nagy pontossággal meg tudják határozni a Föld–Hold távolságot. Ezt úgy végzik el, hogy űrhajósok által 1969-ben a Holdra helyezett speciális tükörre lőtt lézersugár visszaverődési idejét mérik (hátsó belső borító, bal felső ábra).

Ilyen módszerrel közvetlenül megmutatható, hogy a Hold lassan távolodik a Földtől, azaz a Föld–Hold távolság időben lassan növekszik. Ennek oka az, hogy az árapály jelenség során a Föld forgatónyomatékkal hat a Holdra, és így (pálya-) impulzusmomentumát (perdületét) megváltoztatja (*1. ábra*). Ebben a feladatban ennek a jelenségnek a legfontosabb paramétereit vizsgáljuk meg.



1. ábra. A Hold gravitációs hatása következtében a Föld vízfelszínén árapály deformációk, kitüremkedések („bulges") jönnek létre. A Föld forgása miatt a kitüremkedések tengelye nem esik pontosan egybe a Föld–Hold egyenessel. Ez a kis eltérés olyan forgatónyomatékot eredményez, mely a Föld forgásának impulzusmomentumát csökkenti, a Hold pálya menti impulzusmomentumát pedig növeli. Az ábra nem méretarányos

1. Impulzusmomentum-megmaradás

Legyen L_1 a Föld–Hold rendszer jelenlegi impulzusmomentuma. Éljünk a következő közelítő feltevésekkel:

i) L_1 csupán a Földnek a tengely körüli forgásából adódó impulzusmomentumának és a Holdnak a Föld körüli keringéséből adódó (pálya-)impulzusmomentumának összege.

ii) A Hold pályája köralakú, és a Hold pontszerűnek tekinthető.

iii) A Föld forgástengelye és a Hold keringésének tengelye párhuzamos.

iv) A számolás egyszerűsítése érdekében úgy tekintjük, hogy a mozgás a Föld középpontja körül megy végbe, nem pedig a rendszer tömegközéppontja körül. Ebben a feladatban mindenütt minden tehetetlenségi nyomatékot, impulzusmomentumot illetve forgatónyomatékot a Föld tengelyére vonatkoztatunk.

v) A Nap hatását elhanyagoljuk.

1.a. Add meg a Föld–Hold rendszer jelenlegi teljes impulzusmomentumát! Válaszodat a következő mennyiségekkel fejezd ki: a Föld tehetetlenségi nyomatéka: I_{F}; a Föld forgásának jelenlegi szögsebessége: ω_{F1}; a Hold jelenlegi tehetetlenségi nyomatéka a Föld tengelyére vonatkoztatva: I_{H1}; a Hold keringésének jelenlegi szögsebessége: ω_{H1}.

Ez az impulzusmomentum-átadási folyamat addig tart, amíg a Föld forgásának periódusideje egyenlővé nem válik a Hold Föld körüli keringésének idejével. Ekkor a Hold által az óceánok felszínén okozott árapály kitüremkedések („bulges") tengelye egybe fog esni a Föld–Hold egyenessel, és a két égitest közti forgatónyomaték nullává válik.

1.b. Add meg a Föld–Hold rendszer teljes L_2 impulzusmomentumát ebben a végső helyzetben! Ugyanazokkal az egyszerűsítő feltevésekkel dolgozz, mint az 1.a. feladatban. Végeredményedet a következő mennyiségekkel fejezd ki: a Föld tehetetlenségi nyomatéka: I_{F}; a Föld forgásának és a Hold keringésének végső szögsebessége: ω_2; a Hold végső tehetetlenségi nyomatéka: I_{H2}.

1.c. A végső teljes impulzusmomentumban a Föld forgásának járulékát elhanyagolva írd föl az impulzusmomentum-megmaradás egyenletét erre a problémára!

2. Végső pályasugár és végső szögsebesség a Föld–Hold rendszerben

Tegyük föl, hogy a Holdat a gravitációs erő minden esetben a Föld körüli körpályán tartja. A végső, teljes impulzusmomentumban a Föld forgásának járulékát hanyagoljuk el.

2.a. A végső helyzetben írd föl a Föld körül keringő Holdra a körmozgás alapegyenletét a következő mennyiségek felhasználásával: M_{F}, ω_2, G és D_2, ahol D_2 a végső távolság a Föld és a Hold között, M_{F} a Föld tömege, G pedig a gravitációs állandó.

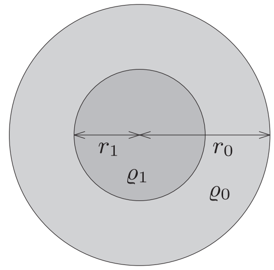
2.b. Add meg a Hold végső pályasugarát, D_2-t a következő mennyiségekkel: a rendszer teljes impulzusmomentuma: L_1; a Föld, illetve a Hold tömege: M_{F}, illetve M_{H}; a gravitációs állandó G.

2.c. Add meg a Föld–Hold rendszer végső ω_2 szögsebességének képletét az L_1, M_{F}, M_{H} és G mennyiségek segítségével!

Most D_2 és ω_2 számszerű értékét határozzuk meg. Ehhez szükség van a Föld tehetetlenségi nyomatékára.

2.d. Tételezzük föl, hogy a Föld sűrűsége belül, a középponttól r_1 sugárig ϱ_1, míg ezen kívül, tehát az r_1 sugártól a felszínig, r_0-ig a sűrűség ϱ_0. Add meg a Föld I_{F} tehetetlenségi nyomatékának képletét (*2. ábra*)!

[1] A hivatalos megoldást és a mérési feladatot a KöMaL novemberi számában ismertetjük.
A feladatok kidolgozására 5 óra állt rendelkezésre.



2. ábra. A gömb alakú Föld a két különböző, ϱ_1 és ϱ_0 sűrűségű tartománnyal

Ebben a feladatban a kért számadatokat **minden esetben** *két értékes jegy* pontossággal határozd meg!

2.e. Határozd meg a Föld I_F tehetetlenségi nyomatékának számértékét, felhasználva, hogy $\varrho_1 = 1{,}3 \cdot 10^4$ kg m^{-3}, $r_1 = 3{,}5 \cdot 10^6$ m, $\varrho_0 = 4{,}0 \cdot 10^3$ kg m^{-3} és
$r_0 = 6{,}4 \cdot 10^6$ m.

A Föld, illetve a Hold tömege $M_\mathrm{F} = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg, illetve $M_\mathrm{H} = 7{,}3 \cdot 10^{22}$ kg. A két égitest jelenlegi távolsága $D_1 = 3{,}8 \cdot 10^8$ m. A Föld forgásának jelenlegi szögsebessége $\omega_\mathrm{F1} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ s^{-1}. A Hold Föld körüli keringésének jelenlegi szögsebessége $\omega_\mathrm{H1} = 2{,}7 \cdot 10^{-6}$ s^{-1}, a gravitációs állandó értéke pedig
$G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}.

2.f. Határozd meg a rendszer L_1 teljes impulzusmomentumának számértékét!

2.g. Határozd meg a végső, D_2 pályasugár értékét méterben, valamint a jelenlegi, D_1 pályasugár arányában!

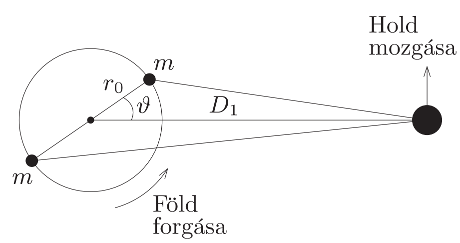
2.h. Határozd meg a végső, ω_2 szögsebesség értékét s^{-1}-ban, valamint add meg a végső helyzetben egy nap hosszát a jelenlegi nap hosszának arányában!

Ellenőrizd, hogy a végső, teljes impulzusmomentumban a Föld forgásából adódó járulék valóban elhanyagolható! Ehhez azt kell megmutatni, hogy a Föld és a Hold végső impulzusmomentumának aránya kis szám.

2.i. Határozd meg a végső helyzetben a Föld és a Hold impulzusmomentumának arányát!

3. Mennyivel távolodik a Hold évenként?

Ebben a részben azt határozzuk meg, hogy mennyivel távolodik a Hold a Földtől évenként. Ehhez először ki kell számolni, hogy jelenleg mekkora forgatónyomatékot fejt ki a Föld a Holdra. Tegyük fel, hogy az árapály deformációból származó kitüremkedések két m tömegű tömegponttal közelíthetőek, melyek a Föld felszínén helyezkednek el (*3. ábra*). Legyen továbbá ϑ a Föld–Hold egyenesnek a kitüremkedések tengelyével bezárt szöge.



3. ábra. Vázlat a dagály-kitüremkedések által a Holdra kifejtett forgatónyomaték számolásához. Az ábra nem méretarányos

3.a. Add meg a Holdhoz közelebbi tömegpont Holdra ható gravitációs erejének F_c nagyságát!

3.b. Add meg a Holdtól távolabbi tömegpont Holdra ható gravitációs erejének F_f nagyságát!

Ezután meghatározhatjuk a tömegpontok forgatónyomatékát.

3.c. Határozd meg a közelebbi tömegpont Holdra ható τ_c forgatónyomatékának nagyságát!

3.d. Határozd meg a közelebbi tömegpont Holdra ható τ_f forgatónyomatékának nagyságát!

3.e. Határozd meg a két tömegpont τ eredő forgatónyomatékának nagyságát! Mivel $r_0 \ll D_1$, az eredményt r_0/D_1 első nem eltűnő hatványáig sorbafejtve add meg. Felhasználhatod, hogy $(1+x)^a \approx 1 + ax$, ha $x \ll 1$.

3.f. Add meg a τ forgatónyomaték számértékét, felhasználva, hogy $\vartheta = 3^\circ$, és $m = 3{,}6 \cdot 10^{16}$ kg. (Megjegyzendő, hogy ennek a tömegnek a nagyságrendje 10^{-8}-szorosa a Föld tömegének.)

Felhasználva, hogy a forgatónyomaték az impulzusmomentum időbeli változási sebessége, határozd meg a Föld–Hold távolság éves növekedésének jelenlegi értékét! Ehhez fejezd ki a Hold impulzusmomentumát kizárólag az M_H, M_F, D_1 és G mennyiségekkel.

3.g. Határozd meg a Föld–Hold távolság évenkénti növekedésének jelenlegi értékét!

Végül becsüld meg, hogy mennyivel nő egy év alatt egy nap hossza.

3.h. Add meg, hogy egy év alatt mennyivel csökken ω_F1, és jelenleg mennyivel nő egy nap hossza egy év alatt!

4. Hová lesz az energia? Az impulzusmomentummal szemben, ami megmarad, a rendszer teljes mechanikai energiája (forgási és gravitációs) nem állandó. Az utolsó részben ezt a kérdést vizsgáljuk.

4.a. Add meg a Föld–Hold rendszer teljes E mechanikai energiáját (forgási- plusz gravitációs energiáját) az égitestek jelenlegi helyzetében! Az eredményt kizárólag az I_{F}, ω_{F1} , M_{H}, M_{F}, D_1 és G mennyiségekkel fejezd ki!

4.b. Fejezd ki az E energia megváltozását, ΔE-t a D_1 és ω_{F1} mennyiségek megváltzásával! Határozd meg ΔE számszerű értékét egy évre vonatkoztatva, felhasználva a D_1 és ω_{F1} mennyiségek megváltozásának $3g$ és $3h$ pontban kiszámolt értékét!

Most ellenőrizzük, hogy az így kapott energiaveszteség összeegyeztethető azzal a hővel, amit a Hold árapály hatása hoz létre a Földön. Tegyük föl, hogy a dagály átlagosan 0,5 m-rel emel meg egy $h = 0{,}5$ m mély vízréteget, a Föld teljes felszínén. (Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy a Föld teljes felszíne vízzel van borítva.) Ez az emelkedés (dagály) minden nap kétszer következik be. Tegyük fel továbbá, hogy a víz viszkozitásának következtéban ennek a gravitációs energiának 10%-a disszipálódik hő formájában apály alkalmával. A víz sűrűsége $\varrho_{\text{víz}} = 10^3$ kg m^{-3}, és a Föld felszínén a gravitációs gyorsulás $g = 9{,}8$ m s^{-2}.

4.c. Mekkora a szóban forgó felületi vízréteg tömege?

4.d. Határozd meg, hogy mennyi energia disszipálódik egy év alatt! Milyen viszonyban áll ez a Föld–Hold rendszer mechanikai energiájának jelenlegi évenkénti csökkenésével?

2. feladat. Lézeres Doppler-hűtés és optikai szirupok

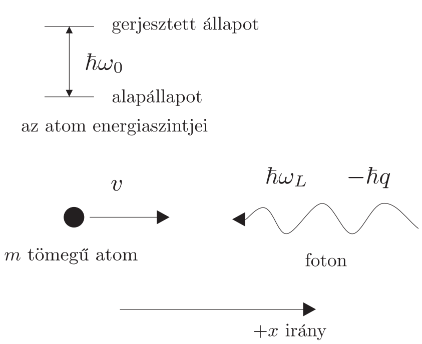
Ennek a feladatnak az a célja, hogy egyszerű elméleti megfontolással megértsed a „lézeres hűtés” és az „optikai szirup” jelenségeket. Ez azt jelenti, hogy semleges atomok (általában alkáli fémek) nyalábját egymással szemben haladó, azonos frekvenciájú lézersugarakkal hűtjük. Ezért kapott 1997-ben fizikai Nobel-díjat S. Chu, P. Phillips és C. Cohen-Tannoudji.

A hátsó belső borító jobb felső képe nátrium atomokat ábrázol (a fényes pont középen), melyek három, egymásra merőleges lézersugár-pár kereszteződésében vannak csapdázva. A csapda területét szokás „optikai szirup”-nak („optical molasses”) nevezni, mivel a disszipatív optikai erő a szirupon áthaladó testekre ható viszkózus erőre emlékeztet.

Ebben a feladatban egy foton és egy atom egyszerű kölcsönhatását és a disszipációs mechanizmust fogod vizsgálni egy dimenzióban.

I. rész: A lézeres hűtés alapjai

Tekints egy m tömegű atomot, amely a $+x$ irányban, v sebességgel mozog. Az egyszerűség kedvéért vizsgáld a problémát egy dimenzióban, azaz ne foglalkozz az y és z irányokkal (*4. ábra*). Az atomnak két belső energiaszintje van. Az alapállapot energiáját nullának tekintjük, a gerjesztett állapot energiája pedig $\hbar\omega_0$, ahol $\hbar = h/2\pi$. Az atom kezdetben alapállapotban van. Egy lézersugár, melynek a laboratórium koordináta-rendszerében mért körfrekvenciája ω_L, a $-x$ irányban halad, és ütközik egy atommal. Kvantummechanikai szempontból a lézersugár nagyszámú egyforma fotonból áll, melyek energiája $\hbar\omega_L$ és impulzusa $-\hbar q$. A fotont elnyelheti egy atom, amely azt később spontán kibocsátja; ez a kibocsátás (emisszió) azonos valószínűséggel történhet a $+x$ és a $-x$ irányban. Mivel az atom nemrelativisztukus sebességgel mozog, $v/c \ll 1$ (ahol c a fénysebesség). Vedd figyelembe azt is, hogy $\hbar q/mv \ll 1$, azaz az atom impulzusa sokkal nagyobb egy foton impulzusánál. A válaszaidban mindkét mennyiségnek csak az elsőrendű (lineáris) tagjait vedd figyelembe.



4. ábra. Egy m tömegű, v sebességű, a $+x$ irányban haladó atom, amely egy $\hbar\omega_L$ energiájú és $-\hbar q$ impulzusú fotonnal ütközik. Az atomnak két belső állapota van $\hbar\omega_0$ energiakülönbséggel

Feltételezd, hogy a lézer ω_L körfrekvenciája úgy van hangolva, hogy a mozgó atom rendszeréből nézve rezonanciában van az atom belső átmenetével. Válaszolj a következő kérdésekre:

1. Elnyelés (abszorpció)

1.a. Add meg a foton elnyelésének (abszorpciójának) rezonanciafeltételét!

1.b. Add meg az atom p_{a} impulzusát az elnyelés után, a laboratórium rendszeréből nézve!

1.c. Add meg az atom ε_{a} teljes energiáját az elnyelés után, a laboratórium rendszeréből nézve!

2. Egy foton spontán kibocsátása (emissziója) a $-x$ irányban

Az ütköző foton elnyelődése (abszorbciója) után valamennyi idővel az atom egy fotont bocsáthat ki (emittálhat) a $-x$ irányban.

2.a. Add meg a kibocsátott foton $\varepsilon_{\rm f}$ energiáját a $-x$ irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

2.b. Add meg a kibocsátott foton $p_{\rm f}$ impulzusát a $-x$ irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

2.c. Add meg az atom $p_{\rm a}$ impulzusát a $-x$ irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

2.d. Add meg az atom $\varepsilon_{\rm a}$ teljes energiáját a $-x$ irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

3. Egy foton spontán kibocsátása (emissziója) a $+x$ irányban

Az ütköző foton elnyelődése (abszorbciója) után valamennyi idővel az atom egy fotont bocsáthat ki (emittálhat) a $+x$ irányban.

3.a. Add meg a kibocsátott foton $\varepsilon_{\rm f}$ energiáját a $+x$ irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

3.b. Add meg a kibocsátott foton $p_{\rm f}$ impulzusát a $+x$ irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

3.c. Add meg az atom $p_{\rm a}$ impulzusát a $+x$ irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

3.d. Add meg az atom $\varepsilon_{\rm a}$ teljes energiáját a $+x$ irányú emissziós folyamat után, a laboratórium rendszeréből nézve!

4. Átlagos kibocsátás (emisszió) az elnyelés (abszorpció) után

A foton spontán kibocsátása egyforma valószínűséggel történhet a $-x$ vagy a $+x$ irányban. Ezt figyelembe véve válaszolj a következő kérdésekre:

4.a. Add meg a kibocsátott foton $\varepsilon_{\rm f}$ átlagos energiáját az emissziós folyamat után!

4.b. Add meg a kibocsátott foton $p_{\rm f}$ átlagos impulzusát az emissziós folyamat után!

4.c. Add meg az atom $\varepsilon_{\rm a}$ átlagos teljes energiáját az emissziós folyamat után!

4.d. Add meg az atom $p_{\rm a}$ átlagos impulzusát az emissziós folyamat után!

5. Energia- és impulzusátadás

Tekints egy teljes egyfotonos elnyelési-kibocsátási (abszorpciós-emissziós) folyamatot, ahogy azt az eddigiekben tárgyaltuk. A lézersugár és az atom között egy eredő átlagos impulzus- és energiaátadás figyelhető meg.

5.a. Add meg az atom $\Delta\varepsilon$ átlagos energiaváltozását egy teljes egyfotonos elnyelési-kibocsátási folyamat után!

5.b. Add meg az atom Δp átlagos impulzusváltozását egy teljes egyfotonos elnyelési-kibocsátási folyamat után!

6. Energia- és impulzusátadás egy $+x$ irányú lézersugárral

Tekints most egy olyan lézersugarat, amelynek ω'_L a körfrekvenciája és a $+x$ irányban halad, miközben az atom szintén a $+x$ irányban halad v sebességgel. Azt feltételezve, hogy az atom belső átmenete és a lézersugár között az atom rendszeréből nézve teljesül a rezonanciafeltétel, válaszolja következő kérdésekre:

6.a. Add meg az atom $\Delta\varepsilon$ átlagos energiaváltozását egy teljes egyfotonos elnyelési-kibocsátási folyamat után!

6.b. Add meg az atom Δp átlagos impulzusváltozását egy teljes egyfotonos elnyelési-kibocsátási folyamat után!

II. rész: Disszipáció és az optikai szirup alapjai

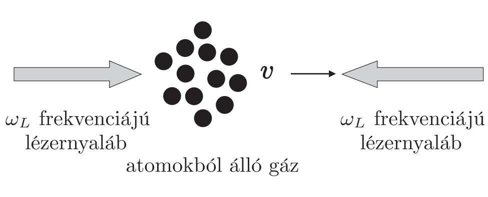
A természetben a kvantumfolyamatokat elkerülhetetlenül bizonytalanság kíséri. Így az a tény, hogy az atom az elnyelés után *véges* idővel bocsát ki egy fotont, azzal a következménnyel jár, hogy a rezonanciafeltétel nem teljesül *egzaktul,* úgy ahogy azt eddig tárgyaltuk. Azaz a lézersugár ω_L és ω'_L körfrekvenciája bármilyen értéket felvehet, és az elnyelés (abszorpció) mégis bekövetkezhet. Az elnyelés különböző (kvantum)valószínűséggel történik, és – mint ahogy azt sejteni lehet – a legnagyobb valószínűséggel éppen a rezonanciafeltétel egzakt teljesülésekor. Egy foton elnyelése és kibocsátása között átlagosan eltelő időt a gerjesztett állapot élettartamának nevezzük, és így jelöljük: Γ^{-1}.

Tekintsünk egy N atomból álló, a laboratórium koordinátarendszeréhez viszonyítva *nyugalomban* lévő atomhalmazt, és egy rá eső ω_L körfrekvenciájú lézersugarat. Az atomok folyamatosan fotonokat nyelnek el és bocsátanak ki, úgy, hogy átlagosan $N_{\rm g}$ atom van gerjesztett állapotban (és így $N-N_{\rm g}$ atom alapállapotban). Kvantummechanikai számítás eredményeként adódik, hogy:

$$N_{\rm g} = N\frac{\Omega_R^2}{\left(\omega_0-\omega_L\right)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2}\,,$$

ahol ω_0 az atomi átmenet rezonancia-körfrekvenciája, és Ω_R az úgynevezett Rabi-frekvencia; Ω_R^2 arányos a lézersugár *intenzitásával.* Láthatod, hogy ez az érték – ahogy már említettük – akkor is különbözik nullától, ha ω_0 nem egyezik meg a lézersugár ω_L körfrekvenciájával. Az előbbi eredményt úgy is kifejezhetjük, hogy időegységenként bekövetkező elnyelési-kibocsátási (abszorpciós-emissziós) folyamatok száma $N_{\rm g}\Gamma$.

Tekintsd az *5. ábrán* látható fizikai elrendezést, ahol két szemben haladó lézersugár egymással *azonos,* de amúgy *tetszőleges* ω_L körfrekvenciával ütközik az N atomból álló, $+x$ irányban v sebességgel mozgó gáznak.



5. ábra. Két szemben haladó lézersugár egymással *azonos,* de amúgy *tetszőleges* ω_L körfrekvenciával ütközik az N atomból álló, $+x$ irányban v sebességgel mozgó gáznak

7. A lézer által az atomnyalábra kifejtett erő

7.a. Az eddigi információk alapján határozd meg azt az erőt, amit a lézersugár kifejt az atomnyalábra! Használd ki, hogy $mv \gg \hbar q$.

8. Kissebességű határeset. Most tételezd fel, hogy az atomok sebessége elég kicsi ahhoz, hogy az erő a v sebesség első rendű tagjával közelíthető.

8.a. Határozd meg a 7.a. feladatban meghatározott erő kifejezését ebben a közelítésben!

Felhasználva ezt az eredményt megkeresheted annak a feltételét, hogy a lézersugár az atomnyalábot gyorsítja, lassítja, illetve nem hat rá.

8.b. Add meg annak a feltételét, hogy az erő pozitív (gyorsítja az atomokat)!

8.c. Add meg annak a feltételét, hogy az erő nulla!

8.d. Add meg annak a feltételét, hogy az erő negatív (lassítja az atomokat)!

8.e. Most tedd fel, hogy az atomok $-v$ sebességgel mozognak (a $-x$ irányban). Add meg annak a feltételét, hogy az erő lassítsa az atomokat!

9. Optikai szirup. Negatív erő esetében egy disszipatív súrlódó erőt kapunk. Tedd fel, hogy kezdetben, amikor $t = 0$, a gáz atomjai v_0 sebességgel mozognak.

9.a. Kissebességes közelítésben határozd meg az atomok sebességét azután, hogy a lézersugarak τ ideje be vannak kapcsolva.

9.b. Most tételezd fel, hogy a gáz atomjai kezdetben T_0 hőmérsékleten termikus egyensúlyban vannak. Határozd meg a T hőmérsékletet azután, hogy a lézersugarak τ ideje be vannak kapcsolva.

(A modell azonban nem teszi lehetővé tetszőlegesen kicsi hőmérséklet elérését.)

3. feladat. Miért olyan nagyok a csillagok?

A csillagok forró gázgömbök, melyek ragyogását a belsejükben lezajló magfúzió adja. Leggyakoribb esetben e folyamat során hidrogénből hélium keletkezik. Ebben a problémában klasszikus mechanikai, illetve kvantummechanikai fogalmak, valamint elektrosztatikai, termodinamikai összefüggések segítségével keressük a választ arra a kérdésre, hogy a gázgömbnek miért csak egy bizonyos mérete fölött indul be a fúziós reakció. Sőt, a hidrogén fúziójához szükséges kritikus tömeg és sugár értékét is meghatározzuk. (A Napról, mint csillagról látható kép a hátsó belső borítón jobbra középen.)

Fontos fizikai állandók:

gravitációs állandó: $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^2;
Boltzmann-állandó: $k = 1{,}4 \cdot 10^{-23}$ J K^{-1};
Planck-állandó: $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ m^{2}kg s^{-1};
proton tömege: $m_\mathrm{p} = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg;
elektron tömege: $m_\mathrm{e} = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg;
elemi töltés: $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C;
vákuum permittivitás: $\varepsilon_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12}$ C^{2}N^{-1}m^{-2};
Nap sugara: $R_\mathrm{N} = 7{,}0 \cdot 10^8$ m;
Nap tömege: $M_\mathrm{N} = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg.

1. Csillagok központi hőmérsékletének klasszikus becslése

Tegyük föl, hogy a csillagot formáló gáz tiszta ionizált hidrogén, azaz elektronok és protonok azonos arányú keveréke, mely ideális gázként viselkedik. A klasszikus fizika törvényei szerint két proton fúziójához az szükséges, hogy 10^{-15} méternél közelebb kerüljenek egymáshoz, mivel csak ilyen kis távolság esetén válik a rövidtávú magerő meghatározóvá. Azonban ahhoz, hogy ilyen közel kerüljenek egymáshoz, le kell győzniük a Coulomb-taszítást. Tegyük fel, hogy két klasszikus, pontszerű részecskének tekintett proton v_rms nagyságú, egymással ellentétes irányú sebességgel halad egymás felé egy egyenes mentén, és frontálisan ütközik. Itt v_rms a termodinamikai átlagsebesség (sebességnégyzet átlagának a gyöke; az index az angol root-mean-square kifejezésre utal).

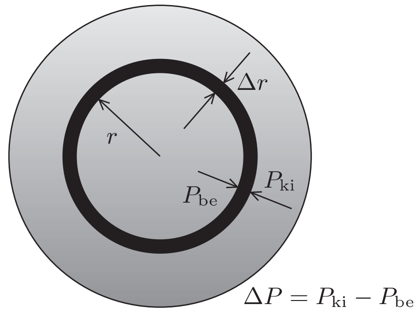
1.a. Határozd meg azt a kritikus T_c hőmérsékletet, amely esetén két ütköző proton közti minimális d_c távolság éppen 10^{-15} m! A keresett értéket, és ebben a feladatban **minden** további számszerű eredményt *két értékes jegyre* adj meg!

2. Annak igazolása, hogy az előző hőmérséklet-becslés hibás

Ahhoz, hogy ellenőrizzük előző becslésünk megbízhatóságát, még egy független módszerre van szükségünk a csillagok központi hőmérsékletének meghatározására. Egy valódi csillag felépítése meglehetősen bonyolult, de néhány egyszerűsítő feltevés használatával a lényeget könnyen megérthetjük. A csillagok egyensúlyban vannak, ami azt jelenti, hogy se nem tágulnak, se nem húzódnak össze, mert a befelé mutató gravitációs erő egyensúlyt tart a kifelé mutató nyomással (*6. ábra*). Egy, a középponttól r távolságban levő gázréteg hidrosztatikai egyensúlyát a

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{G M_r \varrho_r}{r^2}$$

egyenlet fejezi ki, ahol P a gáz nyomása, G a gravitációs állandó, M_r a csillag r sugarú gömbön belül eső részének tömege, ϱ_r pedig a gázréteg sűrűsége.



6. ábra. A csillagok hidrosztatikai egyensúlyban vannak, a nyomás-változással a gravitáció tart egyensúlyt

A csillag központi hőmérsékletére nagyságrendi becslést kaphatunk, ha a paramétereknek a középpontban és a csillag felszínén felvett értékét használjuk, tehát a következő közelítésekkel élünk:

$$\Delta P \approx P_0 - P_{\mathrm{c}},$$

ahol P_{c} a központi, P_0 pedig a felületi nyomás. Mivel $P_{\mathrm{c}} \gg P_0$, feltehetjük, hogy

$$\Delta P \approx -P_{\mathrm{c}}.$$

Ugyanezzel a közelítéssel élve, a „rétegvastagságra" az adódik, hogy

$$\Delta r \approx R,$$

ahol R a csillag (teljes) sugara, valamint

$$M_r \approx M_R = M,$$

ahol M a csillag teljes tömege.

A sűrűség közelíthető a középpontban felvett értékével,

$$\varrho_r \approx \varrho_c.$$

Feltehetjük továbbá, hogy a nyomás az ideális gáztörvényből számolható.

2.a. Határozd meg a csillag középpontjában a T_c hőmérsékletet kizárólag a csillag sugarának, tömegének, valamint fizikai állandóknak a segítségével!

A fenti modell teszteléséhez vizsgáljuk meg a kapott eredmény egy egyszerű következményét:

2.b. A 2.a. pontban kapott egyenlőség alapján add meg a vizsgált csillagokra az M/R arány becsült értékét kizárólag fizikai állandók és T_c függvényében!

2.c. A T_c hőmérsékletnek az 1.a. pontban meghatározott értéke alapján határozd meg számszerűen a csillagok M/R arányának jósolt értékét!

2.d. Most számold ki a Nap esetén az $M_{\mathrm{Nap}}/R_{\mathrm{Nap}}$ arányt, és ellenőrizd, hogy ez az érték sokkal kisebb, mint a 2.c. pontban meghatározott érték!

3. Csillagok központi hőmérsékletének kvantummechanikai becslése

A 2.d. pontban talált nagy eltérés azt sejteti, hogy T_c-nek az 1.a. pontban adott becslése nem helyes. Az ellentmondás kvantummechanikai effektusok figyelembevételével oldható fel. Eszerint a protonok hullámként viselkednek, és egyetlen proton a λ_{p} de Broglie-hullámhosszával azonos nagyságrendű területen „van szétkenve". Ez azt jelenti, hogy ha a protonok között elért d_c minimális távolság a λ_{p} hullámhossz közelébe esik, akkor a két részecske kvantummechanikai értelemben „átfedésbe kerül", és így képesek a fúzióra.

3.a. Feltéve, hogy a v_{rms} sebességgel haladó protonok esetén a fúzió feltétele $d_c = \dfrac{\lambda_{\mathrm{p}}}{2^{1/2}}$, határozd meg T_c értékét csupán fizikai állandók segítségével!

3.b. Határozd meg a T_c hőmérsékletre a 3.a. pontban kapott kifejezés numerikus értékét!

3.c. A 3.b. pontban kapott érték valamint a 2.b. pontban levezetett kifejezés segítségével határozd meg az M/R arány becsült numerikus értékét csillagokra! Ellenőrizd, hogy ez az érték közel esik-e a megfigyelésekből származó $M_{\mathrm{Nap}}/R_{\mathrm{Nap}}$ arányhoz!

Valóban, az úgynevezett *fősorozatba* eső csillagok (melyekben hidrogén fúziója zajlik, „normális" csillagok) nagyon tág tömeghatárok között megfelelnek a fenti becslésnek.

4. Csillagok tömeg/sugár aránya

Az előző feladatban tapasztalt egyezés azt sejteti, hogy a Nap középponti hőmérsékletének becslésére a kvantummechanikai gondolatmenet helyes.

4.a. Az előző eredményt felhasználva mutasd meg, hogy minden olyan csillag esetén, melyben hidrogén-fúzió zajlik, az M tömeg és R sugár aránya állandó, mely kizárólag univerzális fizikai konstansoktól függ! Határozd is meg ezt az M/R arányt ezekre a csillagokra!

5. A legkisebb csillagok tömege és sugara

A 4.a. pontban kapott eredményből arra következtethetnénk, hogy bármely tömeggel létezhetnek hidrogén-fúziós ciklusban levő csillagok, feltéve, hogy az összefüggés feltétele teljesül. Ez a következtetés azonban helytelen.

A hidrogén-fúziós ciklusban levő csillagokban található gáz ideális gázként viselkedik. Ez azt jelenti, hogy az *elektronok közti* d_e tipikus távolság átlagos értéke nagyobb, mint az elektronok λ_e de Broglie-hullámhossza. Ellenkező esetben ugyanis az elektronok egy úgynevezett degenerált állapotban lennének, és a csillag másképp viselkedne. Felhívjuk a figyelmet arra a tényre, hogy a vizsgált csillag-típusban levő protonokat és elektronokat másként kezeljük. Protonok esetén a de Broglie-hullámok átfedése *szükséges* ahhoz, hogy a fúzió létrejöhessen, míg elektronok esetén a de Broglie hullámok *nem* fedhetnek át, mert különben az elektronokat nem kezelhetnénk ideális gázként.

A valóságban a csillagok belsejében levő gáz sűrűsége a középpont felé haladva nő. Ennek ellenére ebben a nagyságrendi becslésben tegyük föl, hogy a vizsgált csillag sűrűsége állandó. Ezen kívül felhasználhatjuk, hogy $m_\mathrm{p} \gg m_\mathrm{e}$.

5.a. Határozd meg az n_e átlagos elektronszám-sűrűséget a csillag belsejében!

5.b. Határozd meg az elektronok közti d_e tipikus távolságot a csillag belsejében!

5.c. A $d_\mathrm{e} \geq \dfrac{\lambda_\mathrm{e}}{2^{1/2}}$ feltétel használatával határozd meg egyenlettel a legkisebb olyan csillag sugarát, mely hidrogén-fúziós ciklusban lehet! (Ezek az ún. normál csillagok.) Tekintsd úgy, hogy a csillag középpontjában mért hőmérséklet a csillagban bárhol mérhető hőmérséklet tipikus értéke.

5.d. Határozd meg a lehető legkisebb normál csillag sugarának számértékét méterben is és a Nap sugarának (rádiuszának) egységében is!

5.e. Határozd meg a lehető legkisebb normál csillag tömegének számértékét kilogrammban is, és Naptömeg-egységben is!

6. Hélium-fúzió öregebb csillagokban

Ahogy a csillagok öregednek, majdnem az összes magjukban lévő hidrogént héliummá (He) alakították, így a további fénykibocsátás érdekében arra kényszerülnek, hogy elkezdjék a hélium fuzionálását nehezebb elemekké. A hélium mag két protonból és két neutronból áll, így a töltése kétszerese, a tömege kb. négyszerese a protonénak. Láttuk korábban, hogy a proton fúziójának feltétele $d_c = \dfrac{\lambda_\mathrm{p}}{2^{1/2}}$.

6.a. Add meg a megfelelő feltételt a hélium magokra vonatkozóan, és határozd meg a hélium magok $v_\mathrm{rms}(\mathrm{He})$ négyzetes átlagsebességét, valamint a hélium fúzióhoz szükséges $T(\mathrm{He})$ hőmérsékletet!