I. rész

1. *Mutassuk meg, hogy az* $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ *(ahol* $x\neq 0$ *valós szám) hozzárendeléssel megadott függvényre minden* $a\neq 0$, $b\neq 0$ *valós számpár esetén teljesül, hogy*

$$f(a)+f(b)+2ab\cdot f(ab)=\frac{f(ab)}{f(a+b)}\,.$$

(11 pont)

Megoldás. Végezzük el a behelyettesítést a bal oldalon:

$$f(a)+f(b)+2ab\cdot f(ab)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+2ab\cdot\frac{1}{(ab)^2}\,.$$

Ezt tovább alakítva:

$$\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2b^2}=\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}=\frac{\dfrac{1}{(ab)^2}}{\dfrac{1}{(a+b)^2}}\,.$$

Ami pontosan $\dfrac{f(ab)}{f(a+b)}$-vel egyenlő, és ezt szerettük volna igazolni.

2. *A természetes számok sorozatából valamelyik számtól kezdve kiválasztjuk minden* 12. *számot addig, míg a kiválasztott számok összege* 2010 *lesz. A kiválasztott számok száma* 10*-nél több, de* 100*-nál kevesebb.*

Melyik számot választottuk ki először és összesen hány darabot? *(12 pont)*

Megoldás. Legyen az először kiválasztott szám x ($x\in N$), a kiválasztott számok darabszáma pedig k ($10<k<100$ és $k\in\mathbb{N}$).

Ezen számok összege:

$$x+(x+12)+\ldots+\big(x+(k-1)\cdot 12\big)=kx+12\big(1+\ldots+(k-1)\big)=$$
$$=kx+\frac{(k-1)k}{2}\cdot 12=2010.$$

Vagyis: $k(x+6k-6)=2010=2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$. Ebből következik, hogy k 10-nél nagyobb és 100-nál kisebb osztója a 2010-nek. A 2010-nek 3 db ilyen osztója van: 15; 30; 67.

Ha $k=15$, akkor $x=134-84=50$.

Ha $k=30$, akkor $x=67-174<0$.

Ha $k=67$, akkor $x=30-396<0$.

Tehát csak $k=15$ esetén kapunk megfelelő x-et. Az első kiválasztott szám az 50 és 15 db számot választottunk ki.

3. *Mutassuk meg, hogy ha egy háromszög oldalaira teljesül az* $a^2+b^2>5c^2$ *egyenlőtlenség, akkor* c *a háromszög legkisebb oldala.* *(14 pont)*

Megoldás. A háromszög-egyenlőtlenség miatt: $b+c>a$, amiből következik: $b^2+2bc+c^2>a^2$. Mindkét oldalhoz b^2-et adva:

$$2b^2+2bc+c^2>a^2+b^2>5c^2.$$

Ezt rendezve: $b^2+bc-2c^2>0$, amit így is írhatunk: $b^2-bc+2bc-2c^2>0$, ennek szorzatalakja: $(b-c)(b+2c)>0$. Mivel a második tényező pozitív, ezért az elsőnek is pozitívnak kell lennie, azaz $b>c$.

Hasonlóan belátható, hogy $a>c$, vagyis c valóban a háromszög legkisebb oldala.

4. *Van-e megoldása a* $\sin^6 x+\sin^4 x+2\sin^2 x+\cos^2 x=4\sin^5 x$ *egyenletnek a* $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$*-on?* *(14 pont)*

Megoldás. Mindkét oldal néggyel való osztása, majd a bal oldalon $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ helyettesítése után a kapott egyenlet bal oldalának minden tagja pozitív. A számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenség miatt:

$$\sin^5 x=\frac{\sin^6 x+\sin^4 x+\sin^2 x+1}{4}\geq\sqrt[4]{\sin^{12} x}=\sin^3 x.$$

Vagyis: $\sin^3 x(\sin^2 x-1)\geq 0$.

Mivel a megadott intervallumon $\sin x\in\,]0;1[$, azért az első tényező pozitív, a második tényező negatív, azaz a szorzatuk negatív. Tehát ezen az intervallumon nincs megoldása az egyenletnek.

II. rész

5. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:*

$$x^2 \cdot \log_4(5x^2 - 2x - 3) - x \cdot \log_{\frac{1}{4}}(5x^2 - 2x - 3) \leq x^2 + x. \qquad (16\ pont)$$

Megoldás. A logaritmus miatt: $5x^2 - 2x - 3 > 0$, amiből kapjuk, hogy $x < -0{,}6$ vagy $1 < x$. Azonos alapra hozzuk a logaritmusokat; 0-ra rendezzük, majd szorzattá alakítjuk az egyenlőtlenséget:

$$x(x+1) \cdot \left[\log_4(5x^2 - 2x - 3) - 1\right] \leq 0.$$

A 4-es alapú logaritmus függvény szigorúan monoton nő, ezért a harmadik tényező akkor nemnegatív, ha

$$5x^2 - 2x - 3 \geq 4, \quad \text{azaz} \quad 5x^2 - 2x - 7 \geq 0.$$

Ebből kapjuk: $x \leq -1$ vagy $1{,}4 \leq x$. A három tényező előjelét számegyenesen ábrázolva és a logaritmus miatt tett kikötésünket is figyelembe véve a megoldáshalmaz: $\{-1\} \cup]1; 1{,}4]$.

6. *A Stadion parkjában található „rúgófal" felső lyukába* 10%, *az alsóba* 40% *valószínűséggel talál be Márton.*

a) Mindkét lyukra egyszer lőve mennyi a valószínűsége, hogy

A: *egyszer sem talál;*

B: *egyszer talál?*

b) Hányszor kell az alsó lyukra lőnie, hogy több mint 95% *valószínűséggel legalább egyszer beletaláljon?*

c) Mennyi a valószínűsége, hogy háromszor az alsóra, majd háromszor a felsőre lőve pontosan egyszer talál?

d) Krisztián észrevette, hogy Marci találati valószínűsége nem konstans. Találat után (az eredeti valószínűség) $\frac{1}{10}$ *részével nő, ha nem talál,* $\frac{1}{10}$ *részével csökken az eredeti találati valószínűség. Marci kétszer lő az alsó lyukra. Mekkora a valószínűsége, hogy pontosan egyszer talál?* *(16 pont)*

Megoldás. *a)* A: $0{,}9 \cdot 0{,}6 = 0{,}54$. B: $0{,}9 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}42$.

b) Legyen a rúgások száma n. Ekkor: $1 - 0{,}6^n > 0{,}95$. Az egyenlőtlenség megoldáshalmazából a legkisebb pozitív egész számot keressük. Elvégezzük a következő átalakításokat:

$$0{,}05 > 0{,}6^n, \qquad \lg 0{,}05 > n \lg 0{,}6, \qquad n > \frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}6} \approx 5{,}86.$$

Vagyis legalább 6-szor kell lőnie.

c)
$$\binom{3}{1} \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}9^3 + \binom{3}{1} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 \approx 0{,}367.$$

A keresett valószínűség: kb. 0,367.

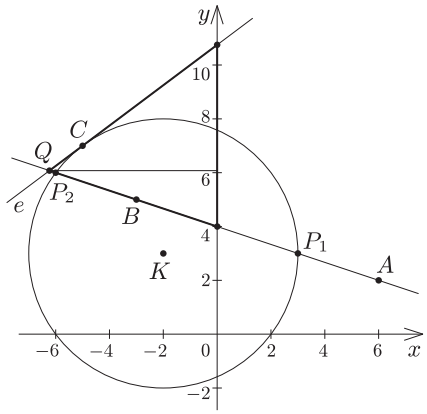
d) $0{,}4 \cdot 0{,}56 + 0{,}6 \cdot 0{,}36 = 0{,}44$. Ebben az esetben Marci 0,44 valószínűséggel talál be pontosan egyszer.

7. *Adott a derékszögű koordinátarendszerben a* $K(-2; 3)$ *középpontú* $r = 5$ *sugarú kör és három pont:* $A(6; 2)$, $B(-3; 5)$ *és* $C(-5; y_0)$, *ahol* $y_0 > 0$.

a) Mekkora a kör AB egyenesre illeszkedő húrjának hossza?

b) A C pont illeszkedik a körre. A kör C-ben húzott érintője legyen az e egyenes. Mekkora területű az a háromszög, amelyet az e egyenes, az y tengely és az AB egyenes fog közre? *(16 pont)*

Megoldás. *a)* Az AB egyenes egyenlete: $y = -\frac{1}{3}x + 4$. A kör egyenlete: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$.



Meghatározzuk a metszéspontjaik koordinátáit. Az y helyére $-\frac{1}{3}x+4$ behelyettesítésével a kör egyenletét a következő alakra rendezzük:

$$0=\frac{10}{9}x^2+\frac{10}{3}x-20.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai: $x_1=3$, $x_2=-6$.

Vagyis a metszéspontok: $P_1(3;3)$, $P_2(-6;6)$; $P_1P_2=\sqrt{9^2+3^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$. Az AB egyenesre illeszkedő húr hossza: $3\sqrt{10}$.

b) Mivel C illeszkedik a körre, azért $(-5+2)^2+(y_0-3)^2=25$. Az $y_0^2-6y_0-7=0$ másodfokú egyenletet kaptuk, melynek megoldásai: $y_0=7$ vagy $y_0=-1$. Mivel $y_0>0$, azért $C(-5;7)$.

A C-beli e érintő egyenlete: $3x-4y=-43$. Az AB egyenes egyenlete: $\frac{1}{3}x+y=4$. A két egyenes Q metszéspontját kiszámítjuk:

$$Q\left(-\frac{81}{13};\frac{79}{13}\right).$$

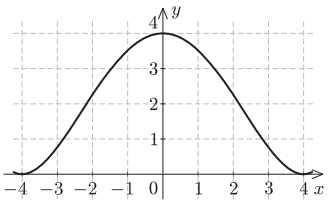
Az e érintő és az y tengely metszéspontja: $R\left(0;\frac{43}{4}\right)$. Az AB egyenes és az y tengely metszéspontja: $S(0;4)$. Vagyis a háromszög RS oldalának hossza: $RS=\frac{27}{4}$. Ezen oldalhoz tartozó magasság hossza:

$m=\frac{81}{13}$.

A keresett terület:

$$t=\frac{\frac{27}{4}\cdot\frac{81}{13}}{2}=\frac{2187}{104}\approx 21{,}03.$$

8. *Egy felújításra váró ház* 8 m *széles és* 4 m *magas oromzatát mutatja a mellékelt* ábra. *Az oromzat ívét leíró görbe érintője a végpontokban vízszintes. Az építész a görbét az* $f(x)=ax^4+bx^2+c$ *függvény grafikonjával szeretné megadni.*



a) *Határozzuk meg az* $f(x)$ *függvény hozzárendelési szabályában szereplő* a, b *és* c *konstansokat.*

b) *Minimum hány doboz festékre lesz szükség az oromzat kétszeri újrafestéséhez, ha* 1 m^2*-re* 350 cm^3 *festék szükséges, és* 2 *literes,* 4 *literes, illetve* 5 *literes kiszerelésben kapható a festék?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az $x=0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $f(0)=4=c$. Tudjuk, hogy $f(-4)=f(4)=0=256a+16b+4$. Tudjuk továbbá, hogy $f'(x)=4ax^3+2bx$, vagyis $f'(4)=0=256a+8b$.

A következő egyenletrendszer megoldásával kapjuk a hiányzó konstansokat:

$$\left.\begin{aligned}256a+16b+4&=0,\\256a+8b&=0.\end{aligned}\right\}$$

Azaz: $a=\frac{1}{64}$, $b=-\frac{1}{2}$.

Tehát a keresett konstansok: $a=\frac{1}{64}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=4$.

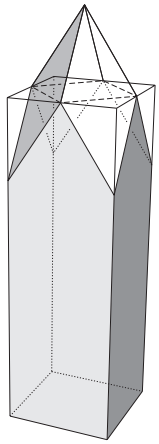
b) Az oromzatot leíró függvény hozzárendelési szabálya: $f(x)=\frac{1}{64}x^4-\frac{1}{2}x^2+4$. A homlokzat területe:

$$T=\int_{-4}^{4}\left(\frac{1}{64}x^4-\frac{1}{2}x^2+4\right)dx=\left[\frac{x^5}{320}-\frac{x^3}{6}+4x\right]_{-4}^{4}=\frac{256}{15}\approx 17.$$

A szükséges festék térfogata cm^3-ben: $V=17\cdot 2\cdot 350=11\,900$, ami 11,9 liter.

Tehát minimum 3 doboz festékre lesz szükség (2 db 5 literesre és 1 db 2 literesre vagy 3 db 4 literesre).

9. *Architectos fejedelem három fiával és seregeivel elfoglalt egy várost. A városfal három sarkán három egyforma négyzetes oszlop alakú torony állt, melyek alapéle* 8 m, *magasságuk* 40 m *volt. A győzelem emlékére a három fiú a három tornyot átalakította. Mindhárom átépítés nagyon hasonló volt egymáshoz. Az eredeti tornyok fedőlapjainak szomszédos élfelezőpontjait összekötő szakaszok mentén levágtak négy egyforma sarkot. Ezeket a megmaradt fedőlapra ültették az ábrának megfelelően úgy, hogy az új toronytető egymáshoz kapcsolódó rombuszokból állt.*



A legidősebb fiú tornyának felszíne nem változott az átépítés után.
A középső fiú úgy végezte el az átalakítást, hogy a torony teljes felszíne a lehető legkisebb lett.
A legfiatalabb fiú tornyán a szomszédos tetősíkok 120°*-os szöget zártak be.*
Adjuk meg az átépített tornyok magasságát. (*16 pont*)

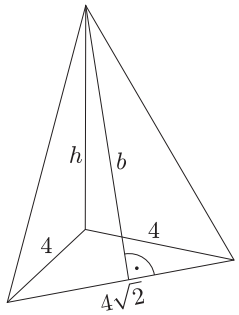
Megoldás. Jelöljük h-val, hogy mennyivel lesz magasabb az új torony az eredetinél. A rombusz (*ábrán* is látható) fél átlójának hossza legyen b, a másik átló $4\sqrt{2}$ hosszúságú. Az eredeti torony felszíne:

$$A = 4 \cdot 40 \cdot 8 + 8 \cdot 8 = 1344.$$

Az új tető felszíne:

$$A = 4 \cdot \frac{4\sqrt{2} \cdot 2b}{2} = 16b \cdot \sqrt{2}.$$

A Pitagorasz-tétel alapján: $b = \sqrt{8 + h^2}$.



Az eredeti felszín csökken a fedőlap és az oldallapokon lévő háromszögek területével:

$$8 \cdot 8 + 8 \cdot \frac{4h}{2} = 64 + 16h.$$

Ennek és az új tető felszínének egyenlőnek kell lennie, hogy ne változzon a felszín:

$$64 + 16h = 16\sqrt{2} \cdot \sqrt{8 + h^2}.$$

Oszthatunk 16-tal:

$$4 + h = \sqrt{16 + 2h^2}.$$

Négyzetre emelhetjük mindkét oldalt:

$$16 + 8h + h^2 = 16 + 2h^2, \quad \text{azaz} \quad 0 = h^2 - 8h = h(h - 8).$$

Csak a $h = 8$ lehet a megoldás. A hosszúság adatok méterben voltak adva, ezért ez a torony 8 méterrel lett magasabb. A legidősebb fiú tornya az átépítés után 48 méter magas lett.

A középső fiú által átépített új torony felszíne:

$$A(h) = 1344 - (64 + 16h) + 16\sqrt{16 + 2h^2} = 1280 - 16h + 16\sqrt{16 + 2h^2}.$$

Ennek a függvénynek keressük a minimumhelyét. Ehhez szükségünk van a függvény deriváltjának zérushelyére:

$$A'(h) = -16 + 16 \cdot \frac{1}{2\sqrt{16+2h^2}} \cdot 4h = \frac{16}{\sqrt{16+2h^2}}\big(2h - \sqrt{16+2h^2}\,\big) = 0.$$

Vagyis: $2h = \sqrt{16+2h^2}$, amiből kapjuk, hogy $0 = 16 - 2h^2$. Ennek pozitív gyöke: $h = 2\sqrt{2}$. Ezen a helyen az első derivált negatívból pozitívba vált, tehát a felszínnek itt valóban minimuma van.

A középső fiú tornya az átépítés után $40 + 2\sqrt{2}$, azaz kb. 42,8 méter magas lett.

A legfiatalabb fiú tornyán két szomszédos =rombusz közös oldalára bocsátott közös talppontú magasságai által bezárt szög: $120°$, a rombusz magassága m, oldala: $\sqrt{16+h^2}$. A rombusz területe:

$$\sqrt{16+h^2} \cdot m = \frac{4\sqrt{2} \cdot 2b}{2} = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{8+h^2}, \quad \text{amiből} \quad m = \frac{4\sqrt{16+2h^2}}{\sqrt{16+h^2}}\,.$$

A 8 egység alapú m szárú egyenlőszárú háromszög szárszöge $120°$ (a két szomszédos tetőlap hajlásszöge):

$$\sin\frac{120°}{2} = \frac{4}{m} = \sqrt{\frac{16+h^2}{16+2h^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{azaz:} \quad \frac{16+h^2}{16+2h^2} = \frac{3}{4}\,,$$

amiből: $64 + 4h^2 = 48 + 6h^2$, vagyis: $8 = h^2$. Kapjuk, hogy $h = 2\sqrt{2}$.

A legfiatalabb fiú tornya is az átépítés után $40 + 2\sqrt{2}$, azaz kb. 42,8 méter magas lett.