I. rész

1. *Mutassuk meg, hogy az $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ (ahol $x\neq 0$ valós szám) hozzárendeléssel megadott függvényre minden $a\neq 0$, $b\neq 0$ valós számpár esetén teljesül, hogy*

$$f(a)+f(b)+2ab\cdot f(ab)=\frac{f(ab)}{f(a+b)}.$$

(*11 pont*)

Megoldás. Végezzük el a behelyettesítést a bal oldalon:

$$f(a)+f(b)+2ab\cdot f(ab)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+2ab\cdot\frac{1}{(ab)^2}.$$

Ezt tovább alakítva:

$$\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2b^2}=\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}=\frac{\dfrac{1}{(ab)^2}}{\dfrac{1}{(a+b)^2}}.$$

Ami pontosan $\dfrac{f(ab)}{f(a+b)}$-vel egyenlő, és ezt szerettük volna igazolni.

2. *A természetes számok sorozatából valamelyik számtól kezdve kiválasztjuk minden 12. számot addig, míg a kiválasztott számok összege 2010 lesz. A kiválasztott számok száma 10-nél több, de 100-nál kevesebb.*
Melyik számot választottuk ki először és összesen hány darabot? (*12 pont*)

Megoldás. Legyen az először kiválasztott szám x ($x\in N$), a kiválasztott számok darabszáma pedig k ($10<k<100$ és $k\in\mathbb{N}$).

Ezen számok összege:

$$x+(x+12)+\ldots+\big(x+(k-1)\cdot 12\big)=kx+12\big(1+\ldots+(k-1)\big)=$$
$$=kx+\frac{(k-1)k}{2}\cdot 12=2010.$$

Vagyis: $k(x+6k-6)=2010=2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$. Ebből következik, hogy k 10-nél nagyobb és 100-nál kisebb osztója a 2010-nek. A 2010-nek 3 db ilyen osztója van: 15; 30; 67.

Ha $k=15$, akkor $x=134-84=50$.
Ha $k=30$, akkor $x=67-174<0$.
Ha $k=67$, akkor $x=30-396<0$.
Tehát csak $k=15$ esetén kapunk megfelelő x-et. Az első kiválasztott szám az 50 és 15 db számot választottunk ki.

3. *Mutassuk meg, hogy ha egy háromszög oldalaira teljesül az $a^2+b^2>5c^2$ egyenlőtlenség, akkor c a háromszög legkisebb oldala.* (*14 pont*)

Megoldás. A háromszög-egyenlőtlenség miatt: $b+c>a$, amiből következik: $b^2+2bc+c^2>a^2$. Mindkét oldalhoz b^2-et adva:

$$2b^2+2bc+c^2>a^2+b^2>5c^2.$$

Ezt rendezve: $b^2+bc-2c^2>0$, amit így is írhatunk: $b^2-bc+2bc-2c^2>0$, ennek szorzatalakja: $(b-c)(b+2c)>0$. Mivel a második tényező pozitív, ezért az elsőnek is pozitívnak kell lennie, azaz $b>c$.

Hasonlóan belátható, hogy $a>c$, vagyis c valóban a háromszög legkisebb oldala.

4. *Van-e megoldása a $\sin^6x+\sin^4x+2\sin^2x+\cos^2x=4\sin^5x$ egyenletnek a $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$-on?* (*14 pont*)

Megoldás. Mindkét oldal néggyel való osztása, majd a bal oldalon $\cos^2x=1-\sin^2x$ helyettesítése után a kapott egyenlet bal oldalának minden tagja pozitív. A számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenség miatt:

$$\sin^5x=\frac{\sin^6x+\sin^4x+\sin^2x+1}{4}\geq\sqrt[4]{\sin^{12}x}=\sin^3x.$$

Vagyis: $\sin^3x(\sin^2x-1)\geq 0$.

Mivel a megadott intervallumon $\sin x\in\,]0;1[$, azért az első tényező pozitív, a második tényező negatív, azaz a szorzatuk negatív. Tehát ezen az intervallumon nincs megoldása az egyenletnek.

II. rész

5. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:*

$$x^2 \cdot \log_4(5x^2-2x-3) - x \cdot \log_{\frac{1}{4}}(5x^2-2x-3) \le x^2 + x. \qquad (16\ pont)$$

Megoldás. A logaritmus miatt: $5x^2-2x-3>0$, amiből kapjuk, hogy $x<-0{,}6$ vagy $1<x$. Azonos alapra hozzuk a logaritmusokat; 0-ra rendezzük, majd szorzattá alakítjuk az egyenlőtlenséget:

$$x(x+1)\cdot\left[\log_4(5x^2-2x-3)-1\right]\le 0.$$

A 4-es alapú logaritmus függvény szigorúan monoton nő, ezért a harmadik tényező akkor nemnegatív, ha

$$5x^2-2x-3\ge 4, \quad \text{azaz} \quad 5x^2-2x-7\ge 0.$$

Ebből kapjuk: $x\le -1$ vagy $1{,}4\le x$. A három tényező előjelét számegyenesen ábrázolva és a logaritmus miatt tett kikötésünket is figyelembe véve a megoldáshalmaz: $\{-1\}\cup\,]1;1{,}4]$.

6. *A Stadion parkjában található „rúgófal” felső lyukába 10%, az alsóba 40% valószínűséggel talál be Márton.*

a) Mindkét lyukra egyszer lőve mennyi a valószínűsége, hogy

A: *egyszer sem talál;*

B: *egyszer talál?*

b) Hányszor kell az alsó lyukra lőnie, hogy több mint 95% valószínűséggel legalább egyszer beletaláljon?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy háromszor az alsóra, majd háromszor a felsőre lőve pontosan egyszer talál?

d) Krisztián észrevette, hogy Marci találati valószínűsége nem konstans. Találat után (az eredeti valószínűség) $\frac{1}{10}$ *részével nő, ha nem talál,* $\frac{1}{10}$ *részével csökken az eredeti találati valószínűség. Marci kétszer lő az alsó lyukra. Mekkora a valószínűsége, hogy pontosan egyszer talál?* (*16 pont*)

Megoldás. *a)* A: $0{,}9\cdot 0{,}6=0{,}54$. B: $0{,}9\cdot 0{,}4+0{,}1\cdot 0{,}6=0{,}42$.

b) Legyen a rúgások száma n. Ekkor: $1-0{,}6^n>0{,}95$. Az egyenlőtlenség megoldáshalmazából a legkisebb pozitív egész számot keressük. Elvégezzük a következő átalakításokat:

$$0{,}05>0{,}6^n, \qquad \lg 0{,}05>n\lg 0{,}6, \qquad n>\frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}6}\approx 5{,}86.$$

Vagyis legalább 6-szor kell lőnie.

c)
$$\binom{3}{1}\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^2\cdot 0{,}9^3+\binom{3}{1}\cdot 0{,}6^3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^2\approx 0{,}367.$$

A keresett valószínűség: kb. 0,367.

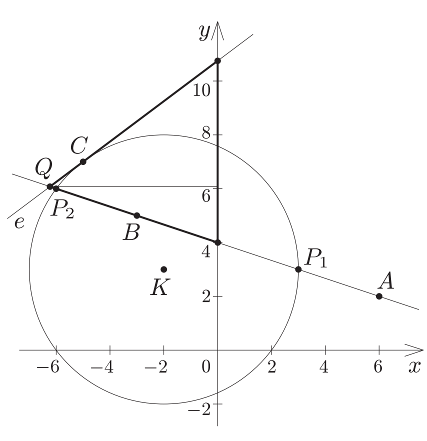
d) $0{,}4\cdot 0{,}56+0{,}6\cdot 0{,}36=0{,}44$. Ebben az esetben Marci 0,44 valószínűséggel talál be pontosan egyszer.

7. *Adott a derékszögű koordinátarendszerben a $K(-2;3)$ középpontú $r=5$ sugarú kör és három pont: $A(6;2)$, $B(-3;5)$ és $C(-5;y_0)$, ahol $y_0>0$.*

a) Mekkora a kör AB egyenesre illeszkedő húrjának hossza?

b) A C pont illeszkedik a körre. A kör C-ben húzott érintője legyen az e egyenes. Mekkora területű az a háromszög, amelyet az e egyenes, az y tengely és az AB egyenes fog közre? (*16 pont*)

Megoldás. *a)* Az AB egyenes egyenlete: $y=-\frac{1}{3}x+4$. A kör egyenlete: $(x+2)^2+(y-3)^2=25$.



Meghatározzuk a metszéspontjaik koordinátáit. Az y helyére $-\frac{1}{3}x+4$ behelyettesítésével a kör egyenletét a következő alakra rendezzük:

$$0=\frac{10}{9}x^2+\frac{10}{3}x-20.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai: $x_1=3$, $x_2=-6$.

Vagyis a metszéspontok: $P_1(3;3)$, $P_2(-6;6)$; $P_1P_2=\sqrt{9^2+3^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$. Az AB egyenesre illeszkedő húr hossza: $3\sqrt{10}$.

b) Mivel C illeszkedik a körre, azért $(-5+2)^2+(y_0-3)^2=25$. Az $y_0^2-6y_0-7=0$ másodfokú egyenletet kaptuk, melynek megoldásai: $y_0=7$ vagy $y_0=-1$. Mivel $y_0>0$, azért $C(-5;7)$.

A C-beli e érintő egyenlete: $3x-4y=-43$. Az AB egyenes egyenlete: $\frac{1}{3}x+y=4$. A két egyenes Q metszéspontját kiszámítjuk:

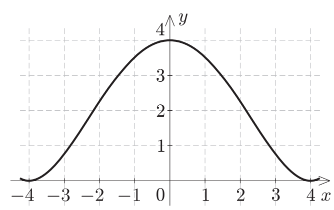
$$Q\left(-\frac{81}{13};\frac{79}{13}\right).$$

Az e érintő és az y tengely metszéspontja: $R\left(0;\frac{43}{4}\right)$. Az AB egyenes és az y tengely metszéspontja: $S(0;4)$. Vagyis a háromszög RS oldalának hossza: $RS=\frac{27}{4}$. Ezen oldalhoz tartozó magasság hossza: $m=\frac{81}{13}$.

A keresett terület:

$$t=\frac{\frac{27}{4}\cdot\frac{81}{13}}{2}=\frac{2187}{104}\approx 21{,}03.$$

8. *Egy felújításra váró ház* 8 m *széles és* 4 m *magas oromzatát mutatja a mellékelt* ábra. *Az oromzat ívét leíró görbe érintője a végpontokban vízszintes. Az építész a görbét az* $f(x)=ax^4+bx^2+c$ *függvény grafikonjával szeretné megadni.*



a) *Határozzuk meg az* $f(x)$ *függvény hozzárendelési szabályában szereplő* a, b *és* c *konstansokat.*

b) *Minimum hány doboz festékre lesz szükség az oromzat kétszeri újrafestéséhez, ha* $1\ \mathrm{m}^2$*-re* $350\ \mathrm{cm}^3$ *festék szükséges, és* 2 *literes,* 4 *literes, illetve* 5 *literes kiszerelésben kapható a festék?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az $x=0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $f(0)=4=c$. Tudjuk, hogy $f(-4)=f(4)=0=256a+16b+4$. Tudjuk továbbá, hogy $f'(x)=4ax^3+2bx$, vagyis $f'(4)=0=256a+8b$.

A következő egyenletrendszer megoldásával kapjuk a hiányzó konstansokat:

$$\left.\begin{array}{l}256a+16b+4=0,\\ 256a+8b=0.\end{array}\right\}$$

Azaz: $a=\frac{1}{64}$, $b=-\frac{1}{2}$.

Tehát a keresett konstansok: $a=\frac{1}{64}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=4$.

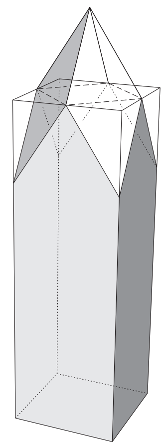
b) Az oromzatot leíró függvény hozzárendelési szabálya: $f(x)=\frac{1}{64}x^4-\frac{1}{2}x^2+4$. A homlokzat területe:

$$T=\int_{-4}^{4}\left(\frac{1}{64}x^4-\frac{1}{2}x^2+4\right)dx=\left[\frac{x^5}{320}-\frac{x^3}{6}+4x\right]_{-4}^{4}=\frac{256}{15}\approx 17.$$

A szükséges festék térfogata cm^3-ben: $V=17\cdot 2\cdot 350=11\,900$, ami 11,9 liter.

Tehát minimum 3 doboz festékre lesz szükség (2 db 5 literesre és 1 db 2 literesre vagy 3 db 4 literesre).

9. *Architectos fejedelem három fiával és seregeivel elfoglalt egy várost. A városfal három sarkán három egyforma négyzetes oszlop alakú torony állt, melyek alapéle* 8 m, *magasságuk* 40 m *volt. A győzelem emlékére a három fiú a három tornyot átalakíttatta. Mindhárom átépítés nagyon hasonló volt egymáshoz. Az eredeti tornyok fedőlapjainak szomszédos élfelezőpontjait összekötő szakaszok mentén levágtak négy egyforma sarkot. Ezeket a megmaradt fedőlapra ültették az ábrának megfelelően úgy, hogy az új toronytető egymáshoz kapcsolódó rombuszokból állt.*



A legidősebb fiú tornyának felszíne nem változott az átépítés után.
A középső fiú úgy végezte el az átalakítást, hogy a torony teljes felszíne a lehető legkisebb lett.
A legfiatalabb fiú tornyán a szomszédos tetősíkok $120°$*-os szöget zártak be.*
Adjuk meg az átépített tornyok magasságát. (*16 pont*)

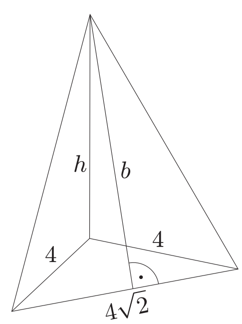
Megoldás. Jelöljük h-val, hogy mennyivel lesz magasabb az új torony az eredetinél. A rombusz (*ábrán* is látható) fél átlójának hossza legyen b, a másik átló $4\sqrt{2}$ hosszúságú. Az eredeti torony felszíne:

$$A = 4 \cdot 40 \cdot 8 + 8 \cdot 8 = 1344.$$

Az új tető felszíne:

$$A = 4 \cdot \frac{4\sqrt{2} \cdot 2b}{2} = 16b \cdot \sqrt{2}.$$

A Pitagorasz-tétel alapján: $b = \sqrt{8 + h^2}$.



Az eredeti felszín csökken a fedőlap és az oldallapokon lévő háromszögek területével:

$$8 \cdot 8 + 8 \cdot \frac{4h}{2} = 64 + 16h.$$

Ennek és az új tető felszínének egyenlőnek kell lennie, hogy ne változzon a felszín:

$$64 + 16h = 16\sqrt{2} \cdot \sqrt{8 + h^2}.$$

Oszthatunk 16-tal:

$$4 + h = \sqrt{16 + 2h^2}.$$

Négyzetre emelhetjük mindkét oldalt:

$$16 + 8h + h^2 = 16 + 2h^2, \quad \text{azaz} \quad 0 = h^2 - 8h = h(h - 8).$$

Csak a $h = 8$ lehet a megoldás. A hosszúság adatok méterben voltak adva, ezért ez a torony 8 méterrel lett magasabb. A legidősebb fiú tornya az átépítés után 48 méter magas lett.

A középső fiú által átépített új torony felszíne:

$$A(h) = 1344 - (64 + 16h) + 16\sqrt{16 + 2h^2} = 1280 - 16h + 16\sqrt{16 + 2h^2}.$$

Ennek a függvénynek keressük a minimumhelyét. Ehhez szükségünk van a függvény deriváltjának zérushelyére:

$$A'(h) = -16 + 16 \cdot \frac{1}{2\sqrt{16+2h^2}} \cdot 4h = \frac{16}{\sqrt{16+2h^2}}\left(2h - \sqrt{16+2h^2}\right) = 0.$$

Vagyis: $2h = \sqrt{16+2h^2}$, amiből kapjuk, hogy $0 = 16 - 2h^2$. Ennek pozitív gyöke: $h = 2\sqrt{2}$. Ezen a helyen az első derivált negatívból pozitívba vált, tehát a felszínnek itt valóban minimuma van.

A középső fiú tornya az átépítés után $40 + 2\sqrt{2}$, azaz kb. 42,8 méter magas lett.

A legfiatalabb fiú tornyán két szomszédos =rombusz közös oldalára bocsátott közös talppontú magasságai által bezárt szög: $120°$, a rombusz magassága m, oldala: $\sqrt{16+h^2}$. A rombusz területe:

$$\sqrt{16+h^2} \cdot m = \frac{4\sqrt{2} \cdot 2b}{2} = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{8+h^2}, \quad \text{amiből} \quad m = \frac{4\sqrt{16+2h^2}}{\sqrt{16+h^2}}.$$

A 8 egység alapú m szárú egyenlőszárú háromszög szárszöge $120°$ (a két szomszédos tetőlap hajlásszöge):

$$\sin\frac{120°}{2} = \frac{4}{m} = \sqrt{\frac{16+h^2}{16+2h^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{azaz:} \quad \frac{16+h^2}{16+2h^2} = \frac{3}{4},$$

amiből: $64 + 4h^2 = 48 + 6h^2$, vagyis: $8 = h^2$. Kapjuk, hogy $h = 2\sqrt{2}$.

A legfiatalabb fiú tornya is az átépítés után $40 + 2\sqrt{2}$, azaz kb. 42,8 méter magas lett.