

1. Egyenlítői gravitációs gyűrű a Nap felületén. A Nap tengelykörüli forgásának következtében az egyenlítőnél egy kicsit nagyobb a sugara, mint a sarkoknál, így az anyageloszlás a Nap forgástengelye körül nem gömbszimmetrikus. Emiatt precesszálnak a bolygópályák a Naprendszerben (csúszik el a perihelium helye). Egy egyszerű modellben úgy tekinthetjük, hogy a Nap forgása miatt a Nap egyenlítőjén egy gravitációs gyűrű alakul ki a Nap felületén, melynek vastagsága elhanyagolható, tömege pedig $M \ll M_S$, ahol M_S a Nap tömege (beleértve a gyűrű tömegét is).

Ennek a hatásnak a bizonyítására feltételezzük, hogy a Nap anyaga egyenletesen és szimmetrikusan oszlik el a bolygópályára merőleges tengely körül, és a Nap–bolygó rendszer gravitációs potenciális energiája, a javasolt modellnek megfelelően, amikor az m tömegű bolygó távolsága a Naptól $r \gg R$, a következő kifejezéssel adható meg:

$$E_p = -\frac{k}{r} \left[1 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 - \frac{3}{8} J_4 \left(\frac{R}{r} \right)^4 + \frac{5}{16} J_6 \left(\frac{R}{r} \right)^6 + \dots \right],$$

ahol R a Nap sugara. A $J_2, J_4, J_6, \dots$ konstansok a Nap anyagának pontos eloszlásától függenek.

a) Kvalitatív érvekkel határozd meg az E_p gravitációs potenciális energia fenti képletében szereplő k értékét. Az általános tömegvonzás γ állandóját tekintsd ismertnek.

Határozd meg az E_p gravitációs potenciális energia fenti képletében szereplő J_2 állandó értékét, felhasználva a javasolt modellt. Használhatod a következő közelítést:

$$(1 + \alpha)^n \cong 1 + n\alpha + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2; \quad \alpha \ll 1.$$

b) Olyan elliptikus bolygópálya, amelynek kicsi az excentricitása, és a bolygópálya csak nagyon kicsit tér el az egyenlítői körpályától, úgy is felfogható, hogy a bolygó nagyon kis amplitudójú sugárirányú rezgést végez az $r = r_0$ távolság körül, és ez a rezgés rátevődik a bolygó Nap körüli körmozgására. (Ha ezt a folyamatot a perdületmegmaradás törvénye alapján vizsgáljuk, akkor kiderül, hogy a sugárirányú rezgés mindenképp együttjár egy azonos periódusidejű érintőirányú rezgéssel is. Ebben a feladatban ezt a hatást elhanyagoljuk.)

Határozd meg a bolygó sugárirányú rezgésének periódusidejét, ha tudjuk, hogy $J_2 = 0$. A bolygó keringési ideje a Nap körül T_k . Feltéve, hogy $J_2 = 0$, írd fel a bolygó mozgási energiáját a következő mennyiségek függvényében: a bolygó p_{rad} sugárirányú impulzusa; a bolygó L perdülete; a bolygó m tömege és a bolygó Naptól mért r távolsága.

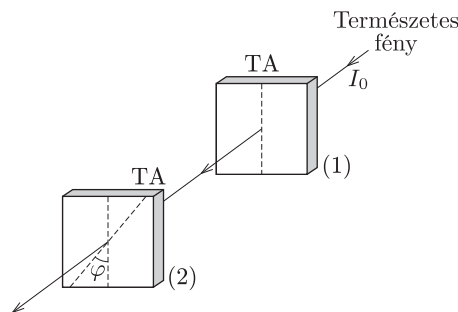
c) Figyelembe véve, hogy a bolygó perdülete állandó ($L = \text{konstans}$), a Nap–bolygó rendszer összenergiájának minden olyan tagját, ami nem függ a sugárirányú impulzustól, feleltess meg egy a bolygó helyétől függő $V_{\text{eff}} = V_{\text{eff}}(r)$ effektív gravitációs potenciálnak. Az effektív gravitációs potenciál bevezetése a bolygó mozgását csak sugárirányú mozgásra korlátozza.

Határozd meg azt az r_0 távolságot, ahol az $F_{\text{eff}} = \frac{dV_{\text{eff}}}{dr}$ effektív gravitációs erő nulla.

d) Felhasználva a feladatban javasolt közelítést, határozd meg a Nap–bolygó rendszer összenergiájának közelítő kifejezését $r = r_0 + \Delta r$ helyen, ahol $\Delta r \ll r_0$, csak az R^2 -nél nem nagyobb tagokat megtartva. Majd ezt a kifejezést összevetve a harmonikus oszcillátor összenergiájának kifejezésével, határozd meg a bolygó sugárirányú rezgésének T_r periódusidejét, ha $J_2 \neq 0$.

Speciális eset: $J_2 = 0$.

2. Valóságos polárszűrők. Tudjuk, hogy a valóságos polárszűrő lemezek nem ideális polarizátorok, vagyis az áteresztési iránnyal (TA) párhuzamos elektromos rezgéseknek nem az összes energiáját engedik át, illetve a TA irányra merőleges elektromos rezgéseket nem nyelik el teljesen. Tegyük fel, hogy az első esetben az energia α hányada jut át, illetve a második esetben az energia β hányadát engedi át a polarizátor. A polárszűrő párra I_0 intenzitású, közönséges, polarizálatlan fénnyaláb esik.



a) Határozd meg egy valóságos polárszűrő pár által átengedett fénnyaláb I intenzitását abban az esetben, ha a polárszűrők az ábra szerint azonos optikai tengelyen helyezkednek el, és a két szűrő TA iránya által bezárt szög φ .

Vizsgáld meg az eredményt ideális polárszűrők esetén is! Az így kapott összefüggés az úgynevezett Malus-törvény.

b) Adjunk összefüggést arra a φ szögre, amely esetén a valóságos polárszűrő pár által átengedett fényintenzitás megegyezik az ideális polárszűrő pár által átengedett fényintenzitással. Mi a feltétele annak, hogy ilyen φ szög létezzen?

c) Legyen $\alpha = 0,95$ és $\beta = 0,05$ egy adott polárszűrő párra. Számítsd ki az I/I_0 arányt valóságos és ideális polárszűrő párok esetén, különböző φ szögek ($\varphi = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ és 90°) esetén, ha rájuk közönséges, polarizálatlan fénysugarat bocsátunk.

Megjegyzés: Feltételezhetjük, hogy a fenti esetekben a fény a polárszűrők felületére merőlegesen halad. A polárszűrők vastagsága valamint a felületükről visszaverődő fény elhanyagolható.

3. A csodálatos szénatom.

A. A kovalens kötés több mint egy elektront tartalmaz. Két elektron csak akkor lehet ugyanabban a térrészben, ha ellentétes a spinjük. A kovalens kötés erősen irányított. A legegyszerűbb kovalens kötés a hidrogénmolekulában van, amely két protonból és két elektrontól áll.

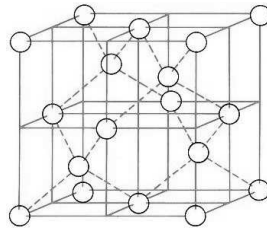
a) Készíts egy elektromos modellt a stacionárius hidrogénmolekulára a hidrogénatom Bohr-modelljének analógiájára.

b) Írd be a modellbe az elektron perdületének kvantálási feltételét az alapállapotban. Határozd meg a hidrogénmolekula geometriai paramétereit és a molekula kötés energiáját.

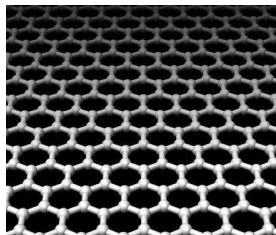
Hanyagold el a sugárzás okozta energiaveszteséget, és vedd figyelembe, hogy az elektron m_e tömege sokkal kisebb a proton m_p tömegénél. Tekintsd ismertnek a hidrogénatom első Bohr-sugarát ($a = 0,533 \cdot 10^{-10}$ m) és a hidrogénre vonatkozó Rydberg-állandót ($R_H = 13,6$ eV).

B. A szén négy kovalens kötést tud képezni. Néha az atomoknak csak három közeli szomszédja van. Ilyenkor két szomszédhoz szimpla kovalens kötéssel, egyhez pedig dupla kovalens kötéssel kapcsolódik.

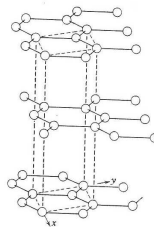
A gyémántban, melynek szerkezete az 1. ábrán látható, minden atom erősen kapcsolódik négy szomszédos atomhoz, melyek egy szabályos tetraéder csúcaiban helyezkednek el. Az összes atom egy hatalmas molekulát alkot. A másik lehetőség az, hogy a szénatomok három szomszédossal hoznak létre kovalens kötést, így egy sík szerkezet jön létre, amit grafénnek nevezünk (2. ábra). Ha ilyen szerkezetek egymásra lapolódnak, grafit jön létre, melynek szerkezete a 3. ábrán látható.



1. ábra

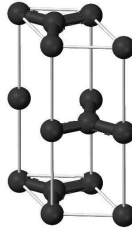


2. ábra



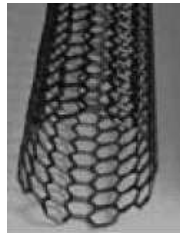
3. ábra

A grafitkristály a 4. ábrán látható rombuszalapú hasáb ismételt egymásmellé rakásával is felépíthető, $\alpha\sqrt{3}$ élhosszal (ahol α egy C–C kötés hossza), ami a 3. ábrán szaggatott vonal jelöl.

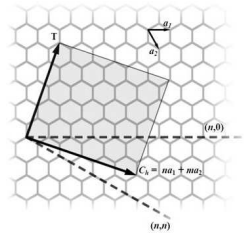


4. ábra

A szén nanocső (carbon nano tube CNT) egy szénatomokból álló üres henger, melynek fala egy feltekert grafén réteg, ahogy az 5. ábrán látható. A nanocső szerkezetének leírásához a kiralitási vektort használjuk (6. ábra): $\vec{C}_n = n\vec{a}_1 + m\vec{a}_2$, ahol $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ a hatszöges rács elemi vektorai, n , m pedig egész számok. A grafén úgy van feltekerve, hogy a $\vec{C}_n$ kiralitási vektor hegye épp a kiindulási pontjába mutasson, míg a $\vec{T}$ csavarási vektor párhuzamos a nanocső tengelyével. Az ilyen nanocsőveket mechanikai szenzorként lehet használni.



5. ábra



6. ábra

Ne felejtse el, hogy a kovalens kötések hossza két szénatom között a grafénben, a grafitban és a gyémántban is $\alpha = 0,15$ nm, két grafénréteg távolsága a grafitban $\beta = 0,34$ nm. A kötési energia a grafit vagy a gyémánt $C-C$ szén kötéseiben $\gamma = 3,6$ eV, a grafit $C=C$ szén kötéseiben pedig $\delta = 6,2$ eV. A szénatom tömege $m_0 = 19,92 \cdot 10^{-27}$ kg, az Avogadro-szám $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol $^{-1}$. Annak ismeretében, hogy szublimáció molhője (ami annak felel meg, hogy a szénatomok szabaddá válnak a kristályból) gyémánton $E_{\text{subl}} = 716$ kJ · mol $^{-1}$, határozd meg:

- a gyémánt sűrűségét és a grafit sűrűségét;
- a gyémánt és a grafit kovalens kötésekből származó kölcsönhatási energiáját. A gyémánt esetében hasonlítsd össze ezt az energiát a szublimációs molhővel, és magyarázd meg az eredményt.

C. Ha egy egyik végén befogott L hosszúságú és E Young-modulusú rúd szabad végére a rúdra merőleges irányban F nagyságú erő hat, akkor a rúd végének a lehajlását az $a = -F \cdot L^3 / (3E \cdot J)$ képlet adja meg. A J keresztmetszeti másodrendű nyomaték definíciója $J = \int_S y^2 dS$, ahol y a dS elemi felületdarab távolsága a rúd neutrális zónájától (attól a síktól, ami nincs se összenyomva, se megnyújtva) és S a rúd keresztmetszete.

A szén nanocső hossza $L = 500$ nm és királis vektora $\vec{C}_n = 20\vec{a}_1 + 20\vec{a}_2$. Annak ismeretében, hogy a grafén Young-modulusa $E = 10^{12}$ Pa és a grafén sűrűsége $\rho = 1900$ kg · m $^{-3}$ (a grafént tömör hengeres rúdnak tekintve) határozd meg:

- a szén nanocső (CNT) rezgésének sajátfrekvenciáját;
- annak a Δm tömegnek a nagyságát, amit a CNT szabad végére helyezve a frekvencia változása $\Delta f = 20$ kHz.