

I. rész

1. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (ahol $x \neq 0$ valós szám) hozzárendeléssel megadott függvényre minden $a \neq 0$, $b \neq 0$ valós számpár esetén teljesül, hogy

$$f(a) + f(b) + 2ab \cdot f(ab) = \frac{f(ab)}{f(a+b)}.$$

(11 pont)

2. A természetes számok sorozatából valamelyik számtól kezdve kiválasztjuk minden 12. számot addig, míg a kiválasztott számok összege 2010 lesz. A kiválasztott számok száma 10-nél több, de 100-nál kevesebb.

Melyik számot választottuk ki először és összesen hány darabot? (12 pont)

3. Mutassuk meg, hogy ha egy háromszög oldalaira teljesül az $a^2 + b^2 > 5c^2$ egyenlőtlenség, akkor c a háromszög legkisebb oldala. (14 pont)

4. Van-e megoldása a $\sin^6 x + \sin^4 x + 2 \sin^2 x + \cos^2 x = 4 \sin^5 x$ egyenletnek a $]0; \frac{\pi}{2}[-$ -on? (14 pont)

II. rész

5. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$x^2 \cdot \log_4(5x^2 - 2x - 3) - x \cdot \log_{\frac{1}{4}}(5x^2 - 2x - 3) \leq x^2 + x. \quad (16 \text{ pont})$$

6. A Stadion parkjában található „rúgófal” felső lyukába 10%, az alsóba 40% valószínűséggel talál be Márton.

a) Mindkét lyukra egyszer löve mennyi a valószínűsége, hogy

A: egyszer sem talál;

B: egyszer talál?

b) Hányszor kell az alsó lyukra lőnie, hogy több mint 95% valószínűséggel legalább egyszer beletaláljon?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy háromszor az alsóra, majd háromszor a felsőre löve pontosan egyszer talál?

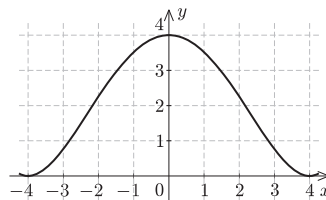
d) Krisztián észrevette, hogy Marci találati valószínűsége nem konstans. Találat után (az eredeti valószínűség) $\frac{1}{10}$ részével nő, ha nem talál, $\frac{1}{10}$ részével csökken az eredeti találati valószínűség. Marci kétszer lő az alsó lyukra. Mekkora a valószínűsége, hogy pontosan egyszer talál? (16 pont)

7. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben a $K(-2; 3)$ középpontú $r = 5$ sugarú kör és három pont: $A(6; 2)$, $B(-3; 5)$ és $C(-5; y_0)$, ahol $y_0 > 0$.

a) Mekkora a kör AB egyenesre illeszkedő húrjának hossza?

b) A C pont illeszkedik a körre. A kör C -ben húzott érintője legyen az e egyenes. Mekkora területű az a háromszög, amelyet az e egyenes, az y tengely és az AB egyenes fog közre? (16 pont)

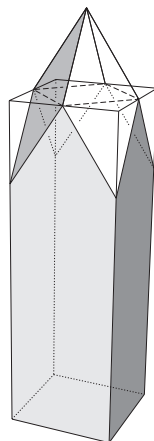
8. Egy felújításra váró ház 8 m széles és 4 m magas oromzatát mutatja a mellékelt ábra. Az oromzat ívét leíró görbe érintője a végpontokban vízszintes. Az építész a görbét az $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ függvény grafikonjával szeretné megadni.



a) Határozzuk meg az $f(x)$ függvény hozzárendelési szabályában szereplő a , b és c konstansokat.

b) Minimum hány doboz festékre lesz szükség az oromzat kétszeri újrafestéséhez, ha 1 m^2 -re 350 cm^3 festék szükséges, és 2 literes, 4 literes, illetve 5 literes kiszerelésben kapható a festék? (16 pont)

9. Architectos fejedelem három fiával és seregeivel elfoglalt egy várost. A városfal három sarkán három egyforma négyzetes oszlop alakú torony állt, melyek alapéle 8 m, magasságuk 40 m volt. A győzelem emlékére a három fiú a három tornyot átalakította. Mindhárom átépítés nagyon hasonló volt egymáshoz. Az eredeti tornyok fedőlappjainak szomszédos élfelezőpontjait összekötő szakaszok mentén levágtak négy egyforma sarkot. Ezeket a megmaradt fedőlappra ültették az ábrának megfelelően úgy, hogy az új tornyotető egymáshoz kapcsolódó rombuszokból állt.



A legidősebb fiú tornyának felszíne nem változott az átépítés után.

A középső fiú úgy végezte el az átalakítást, hogy a torony teljes felszíne a lehető legkisebb lett.

A legfiatalabb fiú tornyán a szomszédos tetősíkok 120° -os szöget zártak be.

Adjuk meg az átépített tornyok magasságát.

(16 pont)