I. rész

1. *Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét:*

$$a = \lg 1000^{2007} + \lg 0{,}001^{2007};$$

(*2 pont*)

$$b = (2005! + 2006!)\left(\frac{1}{2006!} - \frac{1}{2007!}\right);$$

(*4 pont*)

$$c = \left(\frac{2}{\sqrt{2007}-1}\right)\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2007}}\right).$$

(*5 pont*)

Megoldás.

$$a = \lg 1000^{2007} + \lg 0{,}001^{2007} = 2007(\lg 1000 + \lg 0{,}001) = 2007(3-3) = 0.$$

$$b = (2005! + 2006!)\left(\frac{1}{2006!} - \frac{1}{2007!}\right) = 2005!(1+2006)\frac{2007-1}{2007!} = 1.$$

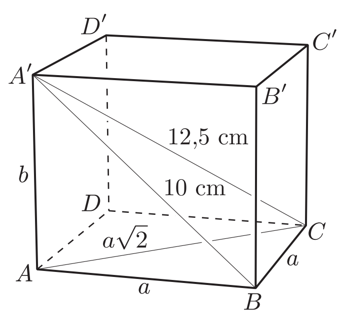
$$c = \frac{2}{\sqrt{2007}-1}\cdot\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2007}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2007}-1}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \ldots + \frac{\sqrt{2007}-\sqrt{2005}}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2007}-1}\cdot\frac{\sqrt{2007}-1}{2} = 1.$$

2. *Egy négyzet alapú egyenes hasáb (négyzetes oszlop) egy oldallapjának átlója* 10 cm, *a testátlója* 12,5 cm. *Mekkora a hasáb felszíne és térfogata?* (*12 pont*)

Megoldás. Készítsünk *ábrát.*

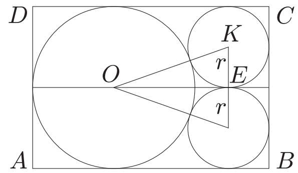


Az ABA' és ACA' derékszögű háromszögekben:

$$a^2 + b^2 = 100, \quad 2a^2 + b^2 = 156{,}25.$$

Ebből $a = 7{,}5$ cm, $b \approx 6{,}614$ cm.
$V = a^2 b \approx 372{,}04\ \text{cm}^3$.
$A = 2a^2 + 4ab \approx 310{,}9\ \text{cm}^2$.

3. *Egy téglalap alakú parkban az* ábra *szerint három egymást és a téglalap oldalait érintő kör alakú virágágyást, valamint a park kerületén, a körök mentén, és a körök középpontjaira illeszkedő, az ábrára berajzolt összes vonal mentén utakat létesítettek. A két kisebb, egyenlő méretű ágyás sugara $r = 15$ m.*



a) *Mekkora a nagy kör sugara?* (*2 pont*)
b) *Milyen hosszú a teljes úthálózat?* (*8 pont*)
c) *Hány százalékát tölti ki a három kör az egész téglalap területének?* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) A nagy kör sugara kétszerese a kis kör sugarának, tehát $R = 30$ m.

b) Használjuk az *ábra* jelöléseit. Az úthálózathoz a két kis kör E érintkezési pontjának és a nagy kör O középpontjának távolságát kell meghatároznunk. Az OKE derékszögű háromszögben $OK = r + R = 45$ m.

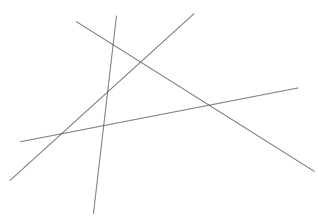
$$OE = \sqrt{45^2 - 15^2} = \sqrt{1800} \approx 42{,}4 \text{ m.}$$

Így a téglalap hosszabbik oldala: $30 + 42{,}4 + 15 \approx 87{,}4$ m. A teljes úthálózat hossza:

$$3AB + 2BC + 2OK + 2KE + 2R\pi + 2 \cdot 2r\pi =$$
$$= 3 \cdot 87{,}4 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 45 + 30 + 60\pi + 2 \cdot 30\pi \approx 879{,}2 \text{ m.}$$

c) A három kör területe: $R^2\pi + 2r^2\pi = 4241$ m^2, a téglalapé: $60 \cdot 87{,}4 = 5244$ m^2.
A körök területe kb. 80,9%-a a téglalap területének.

4. *Adott a síkban* 10 *általános helyzetű egyenes. (Nincs köztük két párhuzamos, és bármely metszésponton csak két egyenes halad át.)*
a) *Hány metszéspontja van a* 10 *egyenesnek?* (*2 pont*)
b) *Hány egymást nem fedő szakaszt, és hány félegyenest számolhatunk össze a* 10 *egyenesen?* (*5 pont*)
c) *Véletlenszerűen kiválasztunk a keletkező egyenesdarabok (szakaszok és félegyenesek) közül kettőt. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott két egyenesdarab azonos típusú lesz? (Mindegyik szakasz, vagy mindegyik félegyenes.)* (*8 pont*)



(Pl. ezen az ábrán 4 *általános helyzetű egyenesnél* 6 *metszéspontot,* 8 *szakaszt és* 8 *félegyenest, azaz* 16 *egyenesdarabot számolhatunk össze.)*

Megoldás. *a*) Bármely két egyenes meghatároz egy metszéspontot, ezért $\binom{10}{2} = 45$ metszéspont van.

b) Minden egyenest 9 másik metsz, és a 9 metszéspont között 8 szakasz és a két „végén" 1–1 félegyenes van. Tehát 80 szakaszt és 20 félegyenest számolhatunk össze.

c) 100 egyenesdarab közül két egyenesdarabot $\binom{100}{2}$, két szakaszt $\binom{80}{2}$, két félegyenest $\binom{20}{2}$-féleképpen választhatunk ki.

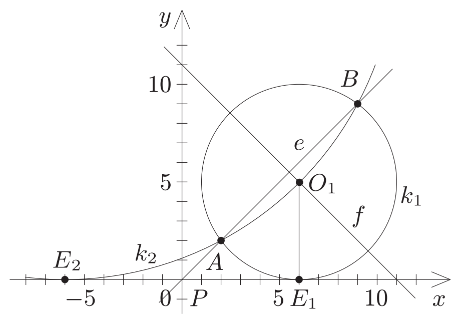
Tehát annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott két egyenesdarab azonos típusú lesz:

$$\frac{\binom{80}{2} + \binom{20}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{\frac{80 \cdot 79}{2} + \frac{20 \cdot 19}{2}}{\frac{100 \cdot 99}{2}} = \frac{6700}{9900} = \frac{67}{99} = 0{,}\dot{6}\dot{7}.$$

II. rész

5. *Adott a koordinátarendszerben az $A(2;2)$ és $B(9;9)$ pont. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely illeszkedik az A és B pontokra és érinti az x tengelyt.* *(16 pont)*

I. megoldás (paraméteres). Legyen a keresett kör középpontja $O(u;v)$. Mivel a kör érinti az x tengelyt, azért sugara v, egyenlete: $(x-u)^2+(y-v)^2=v^2$. O illeszkedik az AB szakasz felező merőlegesére, f-re: $f: x+y=11$, így $u+v=11$, ebből $u=11-v$.



$A(2;2)$ a kör egy pontja: $(2-u)^2+(2-v)^2=v^2$. Beírva u-t:

$$\left[2-(11-v)\right]^2+(2-v)^2=v^2.$$

Ebből: $v_1=5$ és $v_2=17$. Ezekhez: $u_1=6$ és $u_2=-6$.

Két kört kapunk, amelyek egyenlete:

$$(x-6)^2+(y-5)^2=25 \quad \text{és} \quad (x+6)^2+(y-17)^2=289.$$

II. megoldás (a szerkesztés menetét követve). Az AB egyenes a $P(0;0)$ pontban metszi az x tengelyt. A P pontból a körhöz húzott érintőszakasz hossza mértani közepe a pontból húzott szelő két darabjának, PA-nak és PB-nek:

$$PE^2=PA\cdot PB=2\sqrt{2}\cdot 9\sqrt{2}=36.$$

Így P-ből mindkét irányba fel kell mérnünk az x tengelyre a $PE=6$ hosszúságú szakaszt. Így kapjuk a két érintési pontot: $E_1(6;0)$ és $E_2(-6;0)$.

A két középpont második koordinátáit az $f: x+y=11$ egyenletből kaphatjuk: $v_1=5$ és $v_2=17$.

A két kör egyenlete: $(x-6)^2+(y-5)^2=25$ és $(x+6)^2+(y-17)^2=289$.

III. megoldás (mértani helyekkel). Az $A(2;2)$ pontra illeszkedő és x tengelyt érintő körök középpontjai egyenlő távolságra vannak A-tól és az x tengelytől, ezért ezek mértani helye az A fókuszú, x tengely vezéregyenesű parabola, amelynek egyenlete:

$$y=\frac{1}{4}(x-2)^2+1.$$

Ugyanígy a $B(9;9)$ pontra illeszkedő és x tengelyt érintő körök középpontjainak mértani helye az $y=\dfrac{1}{18}(x-9)^2+4{,}5$ egyenletű parabola.

A két parabola metszéspontjai lesznek a keresett középpontok: $O_1(6;5)$ és $O_2(-6;17)$.

A két kör egyenlete: $(x-6)^2+(y-5)^2=25$ és $(x+6)^2+(y-17)^2=289$.

6. *Írjuk fel a páratlan természetes számokat a következő háromszög alakú táblázatba úgy, hogy minden sorban eggyel több szám szerepeljen, mint az előzőben:*

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
21 23 ...

a) *Melyik szám áll a 20. sor elején?* *(3 pont)*

b) *Adjuk meg n függvényében, hogy melyik szám áll az n-edik sor elején, a végén, és mennyi a sorban szereplő számok összege.* *(6 pont)*

c) *Mennyi lesz a számok összege abban a sorban, amelyben a 2007-es szám szerepel?* *(3 pont)*

d) *Az első 100 sorból kiválasztunk véletlenszerűen egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a választott sorban a számok összege négyzetszám?* *(4 pont)*

Megoldás. *a*) Az egyes sorokban rendre $1, 2, 3, \ldots, 19, 20$ db szám szerepel, azaz a sor elején levő számok közötti különbség rendre 2-vel nő. Így a 20. sor elején az

$$1 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 19 \cdot 2 = 1 + \frac{(2 + 38) \cdot 19}{2} = 381$$

szerepel.

b) Az egyes sorokban rendre $1, 2, 3, \ldots, n$ db szám szerepel, így az n. sor elején az

$$1 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2(n-1) = 1 + \frac{(2 + 2(n-1)) \cdot (n-1)}{2} = n^2 - n + 1$$

szám áll.

Az n-edik sorban álló n szám 2 differenciájú számtani sorozatot alkot, ezért a sor végén az elsőnél $2(n-1)$-gyel nagyobb szám, azaz az $n^2 + n - 1$ szerepel.

Az n-edik sorban álló n szám összege:

$$S_n = \frac{\big[(n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1)\big]n}{2} = n^3.$$

c) Azt kell meghatároznunk, hogy melyik sorban szerepel a 2007, azaz melyik a legkisebb n, amelyre $2007 \le n^2 + n - 1$. A $44^2 + 44 - 1$ még csak 1979, de a $45^2 + 45 - 1 = 2069$, tehát 2007 a 45. sorban szerepel. Ebben a sorban a számok összege: $45^3 = 91\,125$.

d) Azt keressük, hogy az első 100 köbszám közül melyek négyzetszámok. Ezek a hatodik hatványok: $1^6, 2^6, 3^6, \ldots, 10^6$. Tehát a keresett valószínűség: $P = \dfrac{10}{100} = 0{,}1$.

7. *a*) *Milyen valós x-ek elégítik ki a $4^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 9^{x+1} = 0$ egyenletet?* (*7 pont*)

b) *Milyen $[0°; 180°]$ intervallumba eső x szögek elégítik ki a következő egyenletet?*

$$2\sin^2 x + 13 \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 6. \qquad \textit{(9 pont)}$$

Megoldás. *a*) Az egyenlet így is írható:

$$4 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 9 \cdot 9^x = 0.$$

Minden tag másodfokú a 2^x, illetve a 3^x változókra. Ilyenkor célszerű mindkét oldalt elosztani az egyik másodfokú kifejezéssel, pl. 9^x-nel. Mivel ez nem lehet 0, így az eredetivel ekvivalens egyenlethez jutunk:

$$4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x} + 9 = 0.$$

Az $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ jelöléssel:

$$(*) \qquad 4y^2 - 13y + 9 = 0.$$

Ennek gyökei: $y_1 = 1$ vagy $y_2 = \dfrac{9}{4}$. Ebből kapjuk: $x_1 = 0$ vagy $x_2 = -2$.

Minden lépés ekvivalens átalakítás volt, ezért a kapott számok megoldásai az egyenletnek.

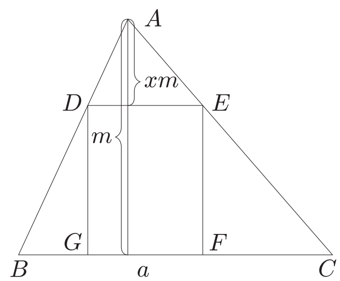
b) Írjunk a jobb oldalon 6 helyére $(6\sin^2 x + 6\cos^2 x)$-et, és redukáljuk 0-ra:

$$0 = 4\sin^2 x - 13 \sin x \cos x + 9\cos^2 x.$$

Osszuk el mindkét oldalt $\cos^2 x$-szel. Mivel $\cos^2 x$ zérushelyei nem megoldások, így az eredetivel ekvivalens egyenlethez jutunk: $0 = 4\,\mathrm{tg}^2 x - 13\,\mathrm{tg}\, x + 9$.

Az $y = \mathrm{tg}\, x$ jelöléssel az *a*) feladat $(*)$ egyenletét kapjuk. Abból pedig az $x_1 = 45°$ vagy az $x_2 = 66{,}04°$ gyököt kapjuk. Most is minden lépés ekvivalens átalakítás volt, ezért a kapott szögek a megoldások.

8. *A T területű ABC hegyesszögű háromszögbe írjunk téglalapot az* 1. ábra *szerint.*

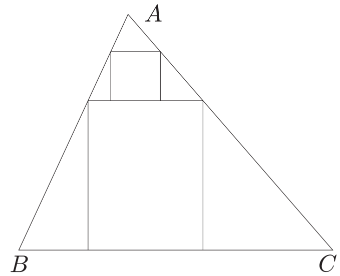


1. ábra

a) Az ADE háromszög A-ból induló magassága x-szerese az ABC A-ból induló m magasságának $(0 < x < 1)$. Fejezzük ki az ADE háromszög és a $DEFG$ téglalap területét T és x segítségével. (*4 pont*)

b) Legfeljebb hányad részét tölti ki a téglalap az ABC háromszög területének? (*5 pont*)

c) Legfeljebb hányad részét tölti ki a 2. ábra *szerint berajzolt két téglalap az ABC háromszög területének?* (*7 pont*)



2. ábra

Megoldás. *a*) Az ADE háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, és a hasonlóság aránya x, ezért: $t_{ADE\triangle} = x^2 \cdot T$. $DE = xa$, $DG = (1-x)m$, ezért $t_{DEFG} = xa(1-x)m = x(1-x)2T$.

b)

$$x(1-x) = x - x^2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

Ennek maximuma $\frac{1}{4}$, ha $x = \frac{1}{2}$.

Ezért $t_{DEFG} = x(1-x)2T$ maximuma $\frac{T}{2}$, ha $x = \frac{1}{2}$. Tehát a téglalap legfeljebb a háromszög területének felét töltheti ki, ha a téglalap magassága éppen a háromszög magasságának fele.

c) Ha a fenti jelölések szerint osztjuk a magasságot, akkor az alsó téglalap területe $x(1-x)2T$.

A felső téglalap területe, mint az előző pontban láttuk, legfeljebb az ADE háromszög területének fele lehet, tehát $\frac{1}{2}x^2T$. Keressük tehát a

$$t_1 + t_2 = \left[2x(1-x) + \frac{1}{2}x^2\right]T = \left[-\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\right]T$$

maximumát.

Látható, hogy ennek a maximuma $\frac{2}{3}T$, ha $x = \frac{2}{3}$.

Tehát a két téglalappal a háromszög területének maximum a kétharmadát tudjuk kitölteni, ha mindkét téglalap magassága harmadrésze a háromszög magasságának.

Megjegyzés. Hibás az a megoldás, hogy az első téglalapot válasszuk a lehető legnagyobbnak, $\frac{1}{2}T$-nek aztán a másodikat megint a lehető legnagyobbnak, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}T = \frac{1}{8}T$-nek, mert így csak $\frac{5}{8}T$-t kapunk, ami kisebb, mint $\frac{2}{3}T$.

9. *Melyek azok az n természetes számok, amelyekre teljesül a következő két feltétel?*

– *Az $\frac{1}{n}$ tizedes tört alakja véges.*

– *Az n^2-nek háromszor annyi pozitív osztója van, mint az n-nek.* (*16 pont*)

Megoldás. Az $\frac{1}{n}$ tizedes tört alakja véges, ha n törzstényezős alakjában 2-n és 5-ön kívül más törzstényező nem szerepel: $n = 2^x \cdot 5^y$ $(x, y \in \mathbb{N})$.

Az n osztóinak száma: $\mathrm{d}(n) = (x+1)(y+1)$, az $n^2 = 2^{2x}5^{2y}$ osztóinak száma: $\mathrm{d}(n^2) = (2x+1)(2y+1)$.

$$3(x+1)(y+1) = (2x+1)(2y+1); \quad xy - x - y - 2 = 0; \quad (x-1)(y-1) = 3.$$

Az $x \geq 0$, $y \geq 0$ miatt csak $x = 2$, $y = 4$ vagy $x = 4$, $y = 2$ lehet. Azaz $n = 2^2 \cdot 5^4 = 2500$, vagy $n = 2^4 \cdot 5^2 = 400$.

A 2500 és a 400 is megfelel a feltételeknek.