

## I. rész

1. Az egymástól 24 km távolságra lévő  $A$  és  $B$  városból egyszerre indul egymással szembe két gépkocsi. Találkozásuk után 4 perccel az a gépkocsi, amelyik a  $B$  városból indult, megérkezik az  $A$  városba, a másik pedig a találkozás után 16 perccel a  $B$  városba. Határozzuk meg a gépkocsik sebességét. (11 pont)

2. a) 1000 almát úgy akarunk  $k$  ( $k \geq 2$ ) tanuló között szétosztani, hogy az első tanuló kapjon  $x$  almát és minden további tanuló rendre 3-mal kevesebbet mindaddig, míg az 1000 almát maradéktalanul ki nem osztottuk.

Hány tanulóról lehet szó? Hány alma jut ekkor az utolsó tanulónak?

b) Legközelebb 16 ember között az 1000 almát úgy szeretnénk elosztani, hogy az első 11 embernek egyforma számú almát adjunk, de ezt követően 50%-kal mindig többet, mint az előzőnek. Ekkor a végén marad még 15 alma. Az egyes emberek által kapott almák számát feljegyezzük, s így kapunk 16 adatot.

Mennyi az így kapott adatok átlaga és módusza? (12 pont)

3. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a)  $\frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{(x+1)^2}} + x + 1 = 0;$

b)  $10^{\lg 3x} = 2x - 3;$

c)  $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+5} = \sqrt{x^2 + 4x - 5};$

d)  $\sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \operatorname{tg} x = \sin x.$

(14 pont)

4. Egy paralelogramma egyik átlójának hossza egy bizonyos szög szinuszával, a másik ugyanennek a szögnek a koszinuszával, míg a rövidebbik oldala a szög kétszeresének szinuszával egyenlő. A két átló által bezárt szög  $60^\circ$ .

Számoljuk ki a paralelogramma oldalhosszainak pontos értékét. (14 pont)

## II. rész

5. Egy biológushallgató két tárgylemez közt lévő vizes közeget figyel mikroszkóppal, amely egy 0,9 mm oldalú négyzet alakú területet foglal el. Ezen négyzet oldalainak harmadával megegyező oldalhosszúságú, 9 négyzetből álló négyzethálót vetít rá a látótérre, amely sakktáblaszerűen szürkével és fehérrel színezett úgy, hogy a bal alsó sarok szürke. Legyen két eseményünk az, hogy amikor először a mikroszkópba néz, akkor egy ponszerű baktériumot

A: fehér négyzetben lát.

B: a közeg négyzetének bal oldalához közelebb látja, mint az alsó oldalához.

a) Számítsuk ki a  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(\overline{A} \cdot B)$  valószínűségeket.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy 0,01 mm sugarú gömb alakú porszemlet úgy pillant meg, mintha a porszemnek lenne valamelyik szürke négyzettel közös pontja? (A porszemlet a mikroszkópban egy 0,01 mm sugarú körlapnak látjuk, és az elhelyezkedése véletlenszerű a megfigyelt közegben.) (16 pont)

6. a) Tekintsük az ötjegyű számokat, amelyekre igaz, hogy utolsó három számjegyük különböző, ezen számjegyek összege 5 és közülük egyik se prímszám. Mennyi ezek közül a 8-cal oszthatók összege?

b) Tekintsük az összes olyan  $n$  pozitív egész számot, amelyre  $n! + 3$  négyzetszám. Hány ilyen négyzetszám van? (16 pont)

7. Az  $A(-2; 0)$  és a  $B(2; 0)$  pont egy derékszögű háromszög átfogójának két végpontja.

a) Határozzuk meg a harmadik csúcspont koordinátáit, ha az  $A$  csúcscsal szemközti befogó hossza 2.

b) A  $B$  középpontú 2 sugarú kör egy olyan háromszög beírható köre, amelynek egyik csúcspontja az  $A$  pont, és az  $A$  ponttal szemközti oldal az  $E(2 + \sqrt{3}; 1)$  pontban érinti a kört. Határozzuk meg e háromszög másik két csúcspontjának koordinátáit.

c) Mekkora a keresett háromszög szögei? (16 pont)

8. Egy egyenes körkúp felszínét, térfogatát és a beírt gömbjének felszínét jelölje sorra  $A$ ,  $V$  és  $G$ . Igazoljuk, hogy  $A^2 G = 36\pi \cdot V^2$ . (16 pont)

9. Legyen adva a valós számokon értelmezett  $f(x) = x - \frac{2}{3}x^3$  függvény.

a) A  $[-2; 1]$  intervallum mely  $x$  értékei esetén veszi fel ez a függvény a maximális, illetve a minimális értékét? Mekkora ezek az értékek?

b) Ezen az intervallumon hol lesz a grafikonhoz húzott érintő párhuzamos a  $g(x) = -3x + 2007$  függvény grafikonjával?

c) Mi lehet a  $h(x)$  függvény hozzárendelési szabálya, ha

$$h(f(x)) = \sqrt[3]{x - \frac{2}{3}x^3}?$$

Határozzuk meg az  $f(h(x))$  összetett függvényt. (16 pont)