

## I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert az egész számpárok halmazán:

$$\left. \begin{aligned} 9^x \cdot 3^y &= 81, \\ 6x + 6y + 5xy &= 0. \end{aligned} \right\}$$

(11 pont)

**Megoldás.** Az első egyenletet  $3^{2x+y} = 3^4$  alakra hozzuk. Ekkor  $2x + y = 4$ , azaz  $y = 4 - 2x$ . Ezt helyettesítsük a második egyenletbe:  $6x + 6(4 - 2x) + 5x(4 - 2x) = 0$ .

Ebből az  $5x^2 - 7x - 12 = 0$  másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek a megoldásai:  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = \frac{12}{5}$ . Mivel ez utóbbi nem egész szám, azért az egyenletrendszer megoldása az egész számpárok halmazán:  $(x; y) = (-1; 6)$ .

2. Az  $1, 2, 3, \dots, n$  pozitív egész számok felhasználásával halmazokat képeztünk az alábbi módon:

*A* halmaz a páros számok halmaza;

*B* halmaz a 3-mal osztható számok halmaza;

*C* halmaz az 5-tel osztható számok halmaza.

a) Véletlenszerűen kiválasztva egy számot az  $n$  db szám közül, mekkora annak a valószínűsége, hogy azt nem használtuk fel a halmazok képzésekor, ha  $n = 48$ ? (6 pont)

b) Ha az  $A \cap B \cap C$  halmaznak 2 eleme van, akkor hány eleme lehet az  $(A \cap B) \setminus C$  halmaznak? (7 pont)

**Megoldás.** a) 1-től 48-ig azok a pozitív egész számok, melyek sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel nem oszthatók: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. Tehát összesen 13 db ilyen szám van. Mivel az összes kiválasztási lehetőségek száma 48, így a keresett valószínűség:  $\frac{13}{48} \approx 0,271$ .

b) Az  $A \cap B \cap C$  halmazba azok az elemek vannak, melyek 2-vel, 3-mal és 5-tel is oszthatók, vagyis oszthatók 30-cal. Ha ennek a halmaznak 2 eleme van, akkor ezek az elemek csak a 30 és a 60 lehetnek. Így  $n$  értéke legalább 60, de  $n$  biztosan kisebb 90-nél, hiszen ellenkező esetben az  $A \cap B \cap C$  halmaznak már 3 eleme lenne. Tehát:  $60 \leq n < 90$ .

Az  $(A \cap B) \setminus C$  halmaznak azok a 2-vel és 3-mal is osztható (tehát 6-tal osztható) számok az elemei, melyek 5-tel nem oszthatók. Ha  $n = 60$ , akkor 8 db ilyen szám van: 6, 12, 18, 24, 36, 42, 48, 54. Ha  $n$  értékét növeljük a megengedett határig, akkor még 4 db ilyen számot találunk: 66, 72, 78, 84.

Ezek szerint ha az  $A \cap B \cap C$  halmaznak 2 eleme van, akkor az  $(A \cap B) \setminus C$  halmaz számossága:  $8 \leq |(A \cap B) \setminus C| \leq 12$ .

3. Egy szarvasmarha telepen 1000 tehenet tartanak. Ezek egy évben 7 300 000 liter tejet adnak. A telep vezetősége azt tapasztalta, hogy – valószínűleg az egy marhára jutó legelőterület növekedése miatt – ha a tehenek számát 5%-kal csökkentik, akkor az egy tehenre jutó éves tejhozam 10%-kal növekszik.

a) A tehenek számának 5%-os csökkentése esetén mennyivel növekszik az éves tejtermelés a gazdaságban? (5 pont)

b) Ilyen állomány esetében az a tény, hogy a tehenek számának  $p$ %-os csökkentésével egy tehen éves tejhozama  $2p$ %-kal növekszik, csak  $p < 20$  esetén érvényes. Hány százalékkal kell csökkenteni a tehenállományt, hogy az éves tejtermelés 10%-kal növekedjen? (8 pont)

**Megoldás.** a) Egy tehen éves tejhozama  $\frac{7\,300\,000}{1000} = 7300$  liter. Ha a tehenállomány 5%-os csökkentésével az egy tehenre jutó éves átlagos tejhozam 10%-kal növekszik, akkor a gazdaságban az egy éves tejhozam:  $1000 \cdot 0,95 \cdot 7300 \cdot 1,1 = 7\,628\,500$ .

Tehát az éves tejhozam-növekedés:  $7\,628\,500 - 7\,300\,000 = 328\,500$  liter.

b) A tehenek számának  $p$ %-os csökkentése után a tehenek száma:  $1000 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ . Az egy tehenre jutó éves  $2p$ %-os növekedésével az egy tehenre jutó éves tejhozam:

$$7300 \cdot \left(1 + \frac{2p}{100}\right).$$

Ha a gazdaság ezzel éves szinten 10%-os növekedést ért el, akkor

$$1000 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot 7300 \cdot \left(1 + \frac{2p}{100}\right) = 7\,300\,000 \cdot 1,1,$$

amit  $1 + \frac{p}{100} - \frac{2p^2}{100^2} = 1,1$  alakban is írhatunk. Ebből:  $p^2 - 50p + 500 = 0$ . A kapott egyenlet 20-nál kisebb gyöke:  $p = 25 - 5\sqrt{5} \approx 13,8$ .

Tehát a tehenállomány kb. 13,8%-os csökkentésével az éves tejhozam 10%-kal növekedik.

4. A  $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$  prímszámokról a következőket tudjuk:  $p_3 = p_1 + p_2$ ,  $p_2^2 + 8$  is prímszám és  $p_4 = 2p_1p_2p_3 + p_1 + p_3$ .

Számítsuk ki a  $p_1 p_2 p_3 p_4$  szorzat értékét.

(14 pont)

**Megoldás.** Mivel a 2-n kívül minden prímszám páratlan, így a  $p_3 = p_1 + p_2$  egyenlőségből következik, hogy a jobb oldali prímek valamelyikének párosnak kell lennie. Mivel a vizsgált prímek közül  $p_1$  a legkisebb, azért csak  $p_1 = 2$  lehet.

Ha a  $p_2 = 3k + 1$  alakú, akkor  $p_2^2 = 9k^2 + 6k + 1$ , így  $p_2^2 + 8 = 9k^2 + 6k + 9$ , ami osztható 3-mal, így  $p_2^2 + 8$  nem lenne prímszám.

Ha a  $p = 3k + 2$  alakú, akkor  $p_2^2 = 9k^2 + 12k + 4$ , így  $p_2^2 + 8 = 9k^2 + 12k + 12$ , ami osztható 3-mal, így  $p_2^2 + 8$  nem lenne prímszám.

Ezek szerint  $p_2^2 + 8$  csak úgy lehet prímszám, ha  $p$  osztható 3-mal, vagyis  $p_2 = 3$ . (Ekkor  $p_2^2 + 8 = 9 + 8 = 17$ , ami valóban prímszám.)

Ezzel  $p_3 = p_1 + p_2 = 5$ , így  $p_4 = 2p_1 p_2 p_3 + p_1 + p_3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 + 5 = 67$ .

A keresett szám:  $p_1 p_2 p_3 p_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 = 2010$ .

## II. rész

5. A valós számok halmazán értelmezett  $f(x) = x^3 + px^2 + qx$  ( $p \neq -2$ ,  $q \neq 0$ ) függvényről tudjuk, hogy pontosan két zérushelye van, továbbá, hogy  $f(2) = -p$ .

a) Határozzuk meg a függvény zérushelyeit.

(8 pont)

b) Az  $f(x)$  függvény origón átmenő érintője hol metszi a függvény görbéjét?

(8 pont)

**Megoldás.** a) A feltételek szerint az  $f(x) = x^3 + px^2 + qx$  függvénynek pontosan két zérushelye van, azaz az  $x^3 + px^2 + qx = 0$  egyenletnek pontosan két gyöke van. Emeljük ki  $x$ -et a bal oldalon:

$$x(x^2 + px + q) = 0.$$

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha  $x = 0$ , vagy  $x^2 + px + q = 0$ . Tehát az egyenlet egyik gyöke 0. Mivel az  $x^2 + px + q = 0$  másodfokú egyenletnek csak egy gyöke lehet, azért a diszkriminánsa 0 kell, hogy legyen:  $p^2 - 4q = 0$ .

Azt is tudjuk, hogy  $f(2) = -p$ , tehát  $f(2) = 8 + 4p + 2q = -p$ , azaz  $5p + 2q = -8$ . Az előző eredményből  $4q = p^2$ , azaz  $2q = \frac{p^2}{2}$ , így az utóbbi egyenlet:  $5p + \frac{p^2}{2} = -8$ , azaz  $p^2 + 10p + 16 = 0$ , amiből:  $p_1 = -8$ ,  $p_2 = -2$ .

A feltételek szerint  $p \neq -2$ , így csak  $p = -8$  lehet és ezzel  $4q = 64$ , azaz  $q = 16$ . Tehát a keresett függvény:

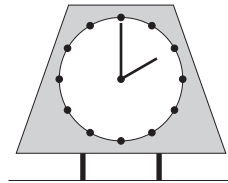
$$f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x = x(x^2 - 8x + 16) = x(x - 4)^2.$$

A függvény zérushelyei:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 4$ .

b) Az origón átmenő érintő meredeksége az  $f(x)$  függvénynek az  $x = 0$  helyen vett differenciálhányadosával egyenlő:  $f'(x) = 3x^2 - 16x + 16$ , ami  $x = 0$ -ban 16. Tehát az érintő meredeksége 16, így az érintő egyenlete:  $y = 16x$ . Ez az egyenes ott metszi az  $f(x)$  függvényt, ahol  $x^3 - 8x^2 + 16x = 16x$ , azaz  $x^3 - 8x^2 = 0$ , vagyis  $x^2(x - 8) = 0$ , ahonnan  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 8$ .

Tehát az  $f(x)$  függvénynek az origóban húzott érintője a függvényt az  $x = 8$  helyen metszi.

6. Egy formatervező szimmetrikus trapéz alakú falemezre szerelt órát tervezett. Az óra körlapjának sugara 10 cm, középpontja a trapéz minden oldalától 12 cm távolságra van és a hosszabbik párhuzamos oldala a rövidebbnek kétszerese.



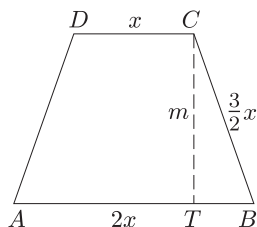
a) Mekkora területű falemezre van szükség?

(7 pont)

b) 2 óra után legközelebb mikor lesz a két óramutató hajlásszöge ugyanakkora, mint 2-kor?

(9 pont)

**Megoldás.** a) Képzeld el, hogy az óra körlapját a középpontjából  $\frac{12}{10} = \frac{6}{5}$  arányban nagyítjuk. Mivel a kör középpontja minden oldaltól 12 cm távolságra van, azért a nagyítás után a kapott kör érinteni fogja a trapéz minden oldalát. Ebből következik, hogy a trapéz érintőnégyesög.



Ha a trapéz rövidebb párhuzamos oldala  $x$ , akkor a hosszabb  $2x$ , így az érintőnégyzőgekre vonatkozó tétel alapján a szárai:  $\frac{x+2x}{2} = \frac{3}{2}x$  hosszúak.

A  $BTC$  derékszögű háromszögben  $BC = \frac{3}{2}x$ ,  $BT = \frac{2x-x}{2} = \frac{1}{2}x$ ,  $CT = m = 2 \cdot 12 = 24$ . Írjuk fel a háromszögre Pitagorasz tételét:

$$\left(\frac{3}{2}x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 24^2, \quad \text{vagyis} \quad \frac{9x^2}{4} = \frac{x^2}{4} + 576,$$

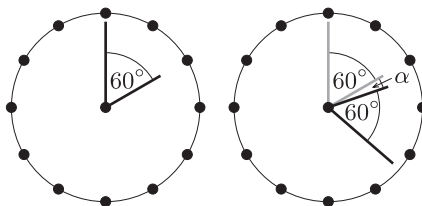
ahonnan  $x = 12\sqrt{2}$ . Ezzel a trapéz  $T$  területe:

$$T = \frac{(24\sqrt{2} + 12\sqrt{2}) \cdot 24}{2} = 36\sqrt{2} \cdot 12 \approx 610,9.$$

Kb.  $610,9 \text{ cm}^2$  területű falemezre van szükség egy óra elkészítéséhez.

b) 2 órakor a kis- és nagymutató  $60^\circ$ -os szöget zár be egymással.

Ha a kismutató  $\alpha$  szöggel fordul el a legközelebbi olyan helyzetig, amikor a két mutató ismét  $60^\circ$ -os szöget zár be egymással, akkor a nagymutató  $60^\circ + \alpha + 60^\circ = 120^\circ + \alpha$  szöggel fordul el. Mivel a nagymutató forgási sebessége a kismutató forgási sebességének 12-szerese, azért  $12\alpha = 120^\circ + \alpha$ , azaz  $11\alpha = 120^\circ$ , ahonnan  $\alpha = \frac{120^\circ}{11}$ .



Most azt kell kiszámítanunk, hogy a kismutató  $\alpha = \frac{120^\circ}{11}$  fokos elfordulása mennyi időt vesz igénybe. A kismutató 1 óra, azaz 60 perc alatt  $30^\circ$ -ot fordul el, így  $1^\circ$ -os elfordulás 2 percig tart. Ezek szerint az  $\alpha$  szögű elfordulás  $2\alpha$  percet vesz igénybe. Esetünkben az elfordulás ideje:

$$2 \cdot \frac{120}{11} = \frac{240}{11} \approx 21,8 \text{ perc.}$$

Tehát 2 óra után legközelebb a két mutató kb. 2 óra 21 perc és 48 másodperckor zár be egymással  $60^\circ$ -os szöget.

**7. Egy városi állatkertben a 4 ragadozót (egy nőstény tigrist, egy oroszlánt, egy leopárdot és egy jaguárt) 8 egymás melletti ketrecben helyezték el.**

a) Hányféleképpen helyezhették el a ragadozókat a 8 ketrecben? (4 pont)

b) Az állatgondozók azt tapasztalták, hogy ha két ragadozó szomszédos ketrecbe kerül, akkor azok rendkívül agresszívakké válnak. Hányféleképpen helyezhették el a ragadozókat a 8 ketrecben úgy, hogy szomszédos ketrecbe ne kerüljenek állatok? (5 pont)

c) A jaguárt elszállították, és hoztak helyébe egy hím tigrist. Annak érdekében, hogy a nőstény és a hím tigris „közeledjenek” egymáshoz, e két tigrist szomszédos ketrecbe akarták elhelyezni. Ekkor hányféleképpen helyezhették el a ragadozókat, ha a két tigris szomszédos ketrecbe került, de ezen kívül nem voltak szomszédos ragadozók? (7 pont)

**Megoldás.** a) A 4 ketrecet, melyekbe elhelyezzük a ragadozókat  $\binom{8}{4}$ -féleképpen választhatjuk ki. E lehetőségek közül bármelyiket kiválasztva, a kiválasztott 4 ketrecbe a 4 állat  $4!$ -féleképpen helyezhető el. Ezek szerint a ragadozókat a 8 db ketrecbe összesen

$$\binom{8}{4} \cdot 4! = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot 4! = \frac{8!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680$$

féle módon helyezhették el.

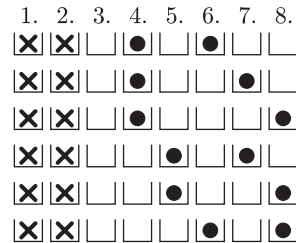
b) Számoljuk össze azokat az elhelyezési lehetőségeket, amikor szomszédos ketrecben nincsenek állatok.

Ha az 1. ketrecbe helyeztünk állatot, akkor helyezhetünk a 3., 5., 7. ketrecbe, vagy a 3., 5., 8. ketrecbe vagy a 3., 6., 8. ketrecbe vagy pedig a 4., 6. és 8. ketrecbe. Ha az első ketrecbe nem helyeztünk, akkor csak a 2., 4., 6. és 8. ketrecbe helyezhetünk állatot. Ez tehát öt lehetőség. Minden lehetőség 4!-féleképpen valósulhat meg, hiszen az adott négy ketrecbe az állatok 4!-féleképpen helyezhetők.

Ezek szerint a 4 állatot úgy elhelyezni a 8 ketrecben, hogy ne legyenek szomszédok, összesen  $5 \cdot 4! = 120$ -féleképpen lehetséges.

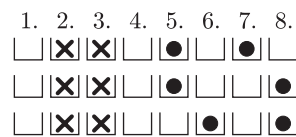
c) Ismét számoljuk össze a lehetőségeket. A két tigris lehet az 1–2. vagy 2–3. vagy 3–4. vagy 4–5. vagy 5–6. vagy 6–7. vagy 7–8. ketrecben.

Ha az 1–2. ketrecben vannak a tigrisek, akkor 6 lehetőség van.



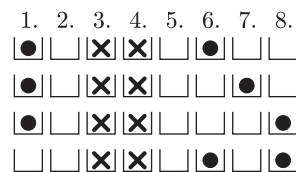
Mivel a két tigris is és a másik két ragadozó is kétféleképpen foglalhatja el a helyét, azért ez esetben a lehetőségek száma:  $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ .

Ha a két tigris a 2–3. ketrecben van, akkor 3 lehetőség van.



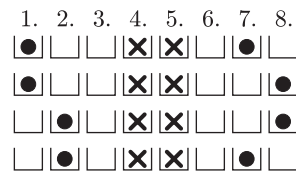
Ekkor az állatokat  $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ -féleképpen helyezhetik el a kívánt módon.

Ha a két tigris a 3–4. ketrecbe kerül, akkor 4 eset van.



Ekkor a lehetőségek száma:  $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ .

Ugyancsak 4-féleképpen választhatók ki a ketrecek, ha a tigrisek a 4–5. helyen vannak.



Tehát ez esetben is 16-féleképpen helyezhetők el az állatok a feltételeknek megfelelően.

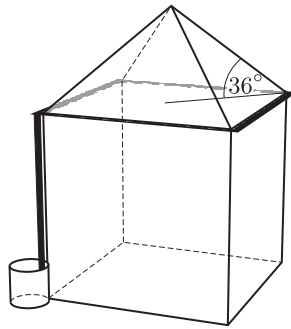
A szimmetria-okok miatt az 5–6. eset megegyezik a 3–4. esettel, a 6–7. eset megegyezik a 2–3. esettel, végül a 7–8. eset megegyezik az 1–2. esettel.

Ezek szerint a 4 ragadozót a 8 ketrecben úgy elhelyezni, hogy a tigrisek szomszédos ketrecben legyenek, de ezen kívül ne legyenek szomszédos ragadozók, összesen

$$24 + 12 + 16 + 16 + 16 + 12 + 24 = 120$$

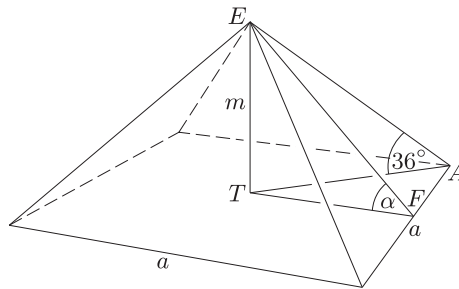
féle módon lehet.

8. Egy négyzet alapú ház tetőszerkezete négyzet alapú egyenes gúla. Az oldalélek az alappnégyzettel  $36^\circ$ -os szöget zárnak be.



- a) Számítsuk ki a tetőszerkezet oldallapjának és alaplappjának a hajlásszögét. (3 pont)
- b) Mekkora a tetőszerkezet légtere, ha az oldaléle 8 m hosszú? (4 pont)
- c) A tetőszerkezet alapnégyzetét ereszcatorna veszi körül. A lehulló eső a tetőről az ereszcatornába, onnan pedig a ház egyik sarkánál függőlegesen haladó csatornán keresztül az alá helyezett egyenes körhenger alakú hordóba folyik. A hordó átmérője 68 cm, magassága 120 cm. Egy 15 percig tartó nyári felhőszakadás során a híradások szerint 20 mm csapadék hullott óránként. Megtelik-e a felhőszakadás után a tetőről lefolyt vízzel a hordó? (9 pont)

**Megoldás.** a) Legyen a tetőtér alapnégyzetének oldala  $a$ , magassága  $m$ ; az oldallap és az alaplapp hajlásszögét az ábrán  $\alpha$ -val jelöltük.



Az  $ATE$  derékszögű háromszögben:

$$AT = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad \text{így} \quad \operatorname{tg} 36^\circ = \frac{m}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{m\sqrt{2}}{a}.$$

Az  $EFT$  derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{\frac{a}{2}} = \frac{2m}{a}.$$

Ezt és az előbb kapott eredményt elosztva egymással azt kapjuk, hogy

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 36^\circ} = \frac{\frac{2m}{a}}{\frac{m\sqrt{2}}{a}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad \text{azaz} \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} 36^\circ, \quad \text{ahonnan} \quad \alpha \approx 45,78^\circ.$$

Ha tehát a négyzet alapú egyenes gúla oldaléle az alaplappal  $36^\circ$ -os szöget zár be, akkor az oldallap az alaplappal kb.  $45,78^\circ$ -os szöget zár be.

b) Ha a gúla oldaléle 8, akkor az  $ATE$  háromszögből

$$\cos 36^\circ = \frac{AT}{8}, \quad \text{ahonnan} \quad AT = 8 \cdot \cos 36^\circ \approx 6,47 \text{ m.}$$

Az  $AT$  ismeretében az alapnégyzet oldala:  $a \approx 9,15$  m.

A gúla  $m$  magasságára  $\sin 36^\circ = \frac{m}{8}$ , ahonnan  $m = 8 \cdot \sin 36^\circ \approx 4,70$  m. A gúla  $V$  térfogata, vagyis a tetőtér légtere:

$$V = \frac{a^2 m}{3} = \frac{9,15^2 \cdot 4,7}{3} \approx 131,17 \text{ m}^3.$$

c) A hordó sugara 0,34 m, magassága 1,2 m. Tehát a hordó  $V_h$  térfogata:

$$V_h = r^2 \pi \cdot m = 0,34^2 \pi \cdot 1,2 \approx 0,4358 \text{ m}^3.$$

Ha a kérdéses felhőszakadás alkalmával 20 mm csapadék esett óránként, akkor 15 perc alatt 5 mm. A tetőre hulló csapadék egy 9,15 m oldalú négyzetre eső csapadéknak felel meg, tehát a tetőre hulló csapadék térfogata egy olyan

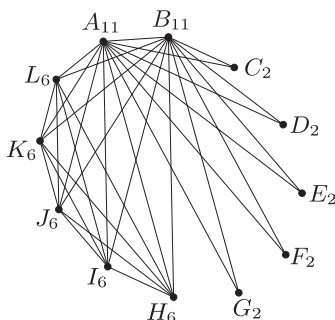
négyzetes hasáb térfogatával egyezik meg, melynek alapnégyzete 9,15 m, magassága pedig 5 mm, azaz 0,005 m. Ennek térfogata:  $9,15^2 \cdot 0,005 \approx 0,4186 \text{ m}^3$ .

Mivel a hordó térfogata  $0,4358 \text{ m}^3$ , így a tetőről lefolyó csapadékkal nem telik meg a hordó.

9. a) Egy pedagógiai konferencia középiskolai szekciójába 12 fő jelentkezett. A 12 fős csoport két tagja (a moderátorok) a csoportból mindenkit ismertek. Őt olyan tagja volt a csoportnak, akik a moderátorokon kívül senkit sem ismertek; a szekció többi tagja közül pedig mindenki mindenkit ismert (az ismeretség minden esetben kölcsönös). Az első szekcióülés előtt, akik nem ismerték egymást, kézfogással bemutatkoztak egymásnak. Hány kézfogás történt? (7 pont)

b) Az óvodai szekciónak három moderátora volt; ők szintén mindenkit ismertek a csoportból. A csoport többi tagjának a fele a moderátorokon kívül senkit sem ismert, míg a csoport többi tagja közül itt is mindenki mindenkit ismert (természetesen az ismeretség itt is minden esetben kölcsönös). Ebben a szekcióban is bemutatkoztak egymásnak azok, akik nem ismerték egymást, s így ebben a csoportban 35 kézfogásra került sor. Hány főből állt az óvodai szekció? (9 pont)

**Megoldás.** a) Készítsük el a 12 fős társaság ismeretségi gráfját. Legyenek  $A$  és  $B$  a moderátorok,  $C, D, E, F$  és  $G$  azok a személyek, akik a moderátorokon kívül senki mást nem ismertek; a többiek pedig  $H, I, J, K$  és  $L$ .



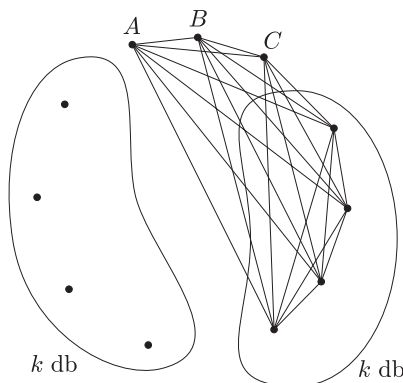
Azt kell meghatároznunk, hogy e gráfba hány élt kellene még berajzolnunk, hogy teljes gráfot kapjunk.

Az  $A$  és  $B$  pontok fokszáma 11-11. A  $C, D, E, F$  és  $G$  pontok mindegyikének fokszáma 2. A  $H, I, J, K$  és  $L$  pontok mindegyikének fokszáma 6. Így a gráfban a fokszámok összege:  $2 \cdot 11 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 6 = 62$ , vagyis a gráf jelenleg meglévő éleinek a száma 31.

Mivel a 12 pontú teljes gráf éleinek a száma  $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ , és jelenleg 31 éle van, így a hiányzó élek száma 35. Tehát a szekcióülés előtt 35 kézfogásra került sor.

b) Legyen  $A, B, C$  a három moderátor. Legyen  $k$  db olyan személy, akik a moderátoron kívül senkit sem ismertek. Ekkor a csoport többi tagjai (ugyancsak  $k$  db személy) közül mindenki mindenkit ismert.

Ekkor a gráfnak  $2k + 3$  pontja van.



A három moderátor és azok, akik közül mindenki mindenkit ismert, együtt egy  $k + 3$  pontú teljes gráfot alkotnak, amiben  $\frac{(k + 3)(k + 2)}{2}$  él van. Azok a személyek, akik csak a moderátorokat ismerték,  $3k$  élt jelentenek, így a gráf meglévő éleinek a száma:  $\frac{(k + 3)(k + 2)}{2} + 3k$ .

A  $2k + 3$  pontú teljes gráf éleinek a száma:

$$\frac{(2k + 3)(2k + 2)}{2},$$

így a meglevő gráf hiányzó éleinek a száma:

$$\frac{(2k+3)(2k+2)}{2} - \frac{(k+3)(k+2)}{2} - 3k = 35,$$

ami  $4k^2 + 10k + 6 - k^2 - 5k - 6 - 6k = 70$  alakban is írható. Vagyis a  $3k^2 - k - 70 = 0$  másodfokú egyenletet kaptuk. A negatív megoldás nyilván érdektelen, így  $k = 5$ .

Tehát az óvodai szekciónak  $2k + 3 = 13$  tagja volt.