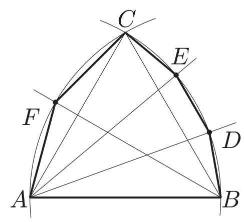
I. rész

1. *Az ABC szabályos háromszögben az A középpontú, AB sugarú kör kisebbik BC ívének B-hez közelebbi harmadolópontja D, C-hez közelebbi harmadolópontja pedig E. A B középpontú AB sugarú kör kisebbik AC ívének felezőpontja F. Mekkorák az $ABDECF$ hatszög belső szögei?* *(11 pont)*

Megoldás. Az ABC szabályos háromszög minden szöge $60°$-os. Az AFB és az FBC egyenlőszárú háromszögnek B-nél $30°$-os szárszöge van, ezért az alapokon fekvő szögeik $75°$-osak. A CAE, az EAD és a DAB egyenlőszárú háromszögeknek A-nál $20°$-os szárszögük van, ezért az alapokon fekvő szögeik $80°$-osak. Ezek alapján a szögek a következők:



A-nál $75°$, B-nél $80°$, D-nél és E-nél $2 \cdot 80°$, azaz $160°$, C-nél $80° + 75° - 60° = 95°$, F-nél $2 \cdot 75°$, azaz $150°$.

2. *Oldjuk meg a következő egyenletet:*

$$\sqrt{x^2 - 2x - 15} \cdot \lg(5 - x) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0. \qquad \textit{(12 pont)}$$

Megoldás. A négyzetgyök értelmezése miatt: $x^2 - 2x - 15 \geq 0$, azaz $x \in \,]-\infty; -3] \cup [5; \infty[$, a logaritmus definíciója miatt: $x \in \,]-\infty; 5[$. Vagyis a feladat értelmezési tartománya: $x \in \,]-\infty; -3]$.

A három tényező zérushelyeit külön-külön megvizsgáljuk.

Az első tényező zérushelyei a -3 és az 5, de a feladat értelmezési tartományának csak a -3 felel meg.

A második tényező zérushelye a 4, de ez nincs benne az értelmezési tartományban.

A harmadik tényező zérushelyei: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, ahol k egész szám. A feladat értelmezési tartománya miatt azonban $k < -1$.

A megoldás: $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi$, ahol $k < -1$ egész szám.

3. *Egy vihar után tizenkét telefonvonal közül négy nem működik. Ekkor négy vonalon megpróbálunk telefonálni. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a négy hívásból pontosan kettő lesz sikeres?* *(14 pont)*

Megoldás. Kiszámítjuk az összes lehetőséget. A 12 vonal közül négyen próbálunk telefonálni, így a 12-ből 4-et kell kiválasztani (a sorrend nem számít). Ezt $\binom{12}{4} = 495$-féleképpen tehetjük meg. Most a vizsgált esemény szempontjából kedvező eseteket számoljuk össze. A két sikeres hívás a nyolc jó vezetéken, a két sikertelen hívás a négy rossz vezetéken történik (a sorrend itt sem számít). Ez $\binom{8}{2} \cdot \binom{4}{2} = 28 \cdot 6 = 168$-féleképpen történhet.

A keresett valószínűség: $p = \frac{168}{495} \approx 0{,}34$.

4. *Mutassuk meg, hogy az $\{a_n\}$ számtani sorozatban:*

$$(x - y)a_z + (y - z)a_x = (x - z)a_y,$$

ahol x, y és z természetes számok. *(14 pont)*

Megoldás. Fejezzük ki az első tag és a különbség segítségével a feladatban szereplő tagokat:

$$a_x = a_1 + (x - 1)d, \quad a_y = a_1 + (y - 1)d, \quad a_z = a_1 + (z - 1)d.$$

Írjuk fel a páronkénti különbségüket:

$$a_x - a_y = (x - y)d, \quad a_y - a_z = (y - z)d, \quad a_x - a_z = (x - z)d.$$

Ha $d \neq 0$, akkor ezeket a következő alakban is írhatjuk:

$$\frac{a_x - a_y}{d}a_z = (x - y)a_z, \quad \frac{a_y - a_z}{d}a_x = (y - z)a_x, \quad \frac{a_x - a_z}{d}a_y = (x - z)a_y.$$

Mivel az első kettő összege a harmadikat adja, azért a bizonyítandó állítást kaptuk.

Ha $d = 0$, akkor $a_x = a_y = a_z$, az állítás ekkor is igaz.

II. rész

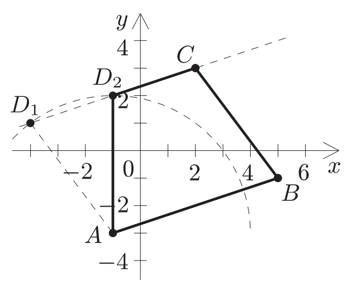
5. *Egy húrtrapéz három csúcsának koordinátája a következő:* $(-1;-3)$*;* $(5;-1)$*;* $(2;3)$*. Határozzuk meg a negyedik csúcs koordinátáit, ha az ismeretlen pont két koordinátájának szorzata negatív.* (*16 pont*)

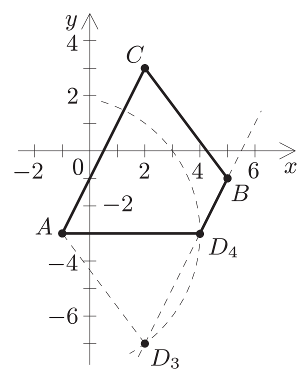
Megoldás. A feladat feltételei szerint a negyedik pontnak a II. vagy a IV. negyedben kell lennie.

Legyen $A(-1;-3)$; $B(5;-1)$; $C(2;3)$.

1. eset: AB a szár. Belátható, hogy ekkor a D csúcs a III. negyedben van.

2. eset: AB a hosszabb alap, BC a szár, aminek hossza 5. A C pontra illeszkedő AB-vel párhuzamos egyenes egyenlete: $x-3y=-7$. Ez az egyenes az A középpontú 5 sugarú körből (amelynek egyenlete: $(x+1)^2+(y+3)^2=25$) kimetszi a D pontot. Két metszéspontot kapunk. A $D_1(-4;1)$ nem jó, mert ekkor a négyszög olyan paralelogramma, ami nem húrtrapéz. A $D_2(-1;2)$ minden feltételnek megfelel.





3. eset: AC a hosszabb alap, BC a szár, aminek hossza 5. A B pontra illeszkedő AC-vel párhuzamos egyenes egyenlete: $2x-y=11$. Ez az egyenes az A középpontú 5 sugarú körből kimetszi a D pontot. Két metszéspontot kapunk. A $D_3(2;-7)$ nem jó, mert ekkor a négyszög olyan paralelogramma, ami nem húrtrapéz. A $D_4(4;-3)$ minden feltételnek megfelel.

Vagyis a $(-1;2)$, illetve a $(4;-3)$ koordinátájú pont lehet a húrtrapéz negyedik csúcsa.

6. *Egy iskola két párhuzamos osztálya közös dolgozatot írt, az elérhető legmagasabb pontszám* 120 *pont volt. Az* A *osztályban* 74 *pont, a* B *osztályban* 84 *pont lett az átlag. Az* A *osztályos lányok átlaga* 71 *pont, a* B *osztályos lányok pedig* 81 *pontot értek el átlagosan. Az összes lány átlaga* 79 *pont lett. A fiúk átlaga az* A *osztályban* 76 *pont, a* B *osztályban pedig* 90 *pont. Mennyi a két osztályban az összes fiú átlagpontszáma?* (*16 pont*)

Megoldás. Készítsünk egy táblázatot a rendelkezésünkre álló adatok alapján. A két osztályban az összes fiú átlagpontszáma legyen x.

	lányok	fiúk	osztály
A	71	76	74
B	81	90	84
összes	79	x	

Legyen az A osztályban a lány, a B osztályban b lány, az A osztályban c fiú, a B osztályban d fiú. Ekkor a táblázat első sora alapján:

$$71a+76c=74(a+c). \tag{1}$$

A táblázat második sora alapján:

$$81b+90d=84(b+d). \tag{2}$$

A táblázat első oszlopa alapján:

$$71a+81b=79(a+b). \tag{3}$$

A táblázat második oszlopa alapján:

$$76c+90d=x(c+d), \qquad \text{vagyis:} \qquad x=\frac{76c+90d}{c+d}. \tag{4}$$

Az (1), (2) és (3) egyenleteket rendezzük: (1)-ből: $c=1{,}5a$;
(2)-ből: $d=0{,}5b$;
(3)-ból: $b=4a$.

Vagyis $d=0{,}5\cdot 4a=2a$.

Alkalmazzuk (4)-ben a $c = 1{,}5a$ és a $d = 2a$ helyettesítéseket:

$$x = \frac{76c + 90d}{c + d} = \frac{76 \cdot 1{,}5a + 90 \cdot 2a}{1{,}5a + 2a} = \frac{294a}{3{,}5a} = 84.$$

A két osztályban az összes fiú átlagpontszáma 84.

7. *Egy kis patak vízmélységét a folyás irányára merőlegesen az* $f\colon [0;3] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^3 - 9x}{9}$ *függvény adja meg (ahol az egységek métert jelentenek).*

a) A patak szélétől hány méterre a legmélyebb a víz?

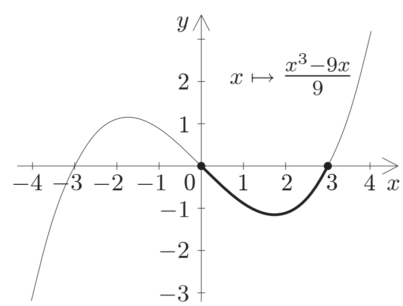
b) Mekkora a legnagyobb vízmélység?

c) Mekkora a patak percenkénti vízhozama, ha a folyási sebességét $0{,}5\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$*-nak vehetjük?*

Megoldás. *a*) A függvény minimumhelyét keressük. Vegyük a függvény deriváltját:

$$f'(x) = \frac{1}{9}(3x^2 - 9) = \frac{1}{3}(x^2 - 3).$$

A $[0;3]$ intervallumon egyetlen zérushelye van: $x = \sqrt{3}$. Itt a derivált előjelet vált, negatívból pozitív lesz, ezért a függvénynek az $x = \sqrt{3}$ a minimumhelye. Vagyis a patak egyik szélétől $\sqrt{3}$, a másik szélétől $3 - \sqrt{3}$ méterre a legmélyebb a víz.



b) A legnagyobb vízmélységet akkor kapjuk, ha a függvény minimumértékét kiszámítjuk.

$$f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3 - 9\sqrt{3}}{9} = \frac{3\sqrt{3} - 9\sqrt{3}}{9} = -\frac{2}{3}\sqrt{3} \approx -1{,}15.$$

Vagyis kb. 1,15 méter a legnagyobb vízmélység.

c) A patak keresztmetszetének területét a következő integrál adja:

$$\int_0^3 \frac{9x - x^3}{9}\,dx = \frac{1}{9}\left[\frac{9x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \frac{1}{9}\left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) = 2{,}25.$$

Vagyis $2{,}25\ \mathrm{m}^2$ a keresztmetszete a vizsgált helyen a pataknak, így a percenkénti vízhozam $0{,}5 \cdot 60 \cdot 2{,}25\ \mathrm{m}^3 = 67{,}5\ \mathrm{m}^3$.

8. *Egy ötszög csúcsainak koordinátája:* $A(0;0)$, $B(12;5)$, $C(12;6)$, $D(10;8)$, $E(4;6)$.

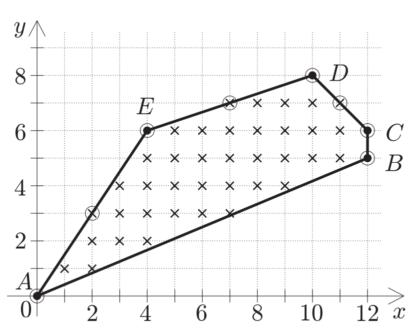
a) Hány rácspont található az ötszög határvonalán?

b) Hány rácspont található az ötszög belsejében?

c) A rácspontokra rajzolt sokszögek területét meghatározhatjuk a következő képlettel: $t = \dfrac{h + 2b - 2}{2}$*, ahol* h *a határvonalon,* b *a belsejében lévő rácspontok számát jelöli. Mennyi ezen képlet szerint a feladatban szereplő ötszög területe?*

d) Határozzuk meg a fenti képlet ismerete nélkül az ötszög területét. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az AB és a BC szakaszokon nincs rácspont, a CD, a DE és a AE szakaszokon pedig 1–1 db van. A csúcspontokkal együtt összesen 8 db van. (Ahol bizonytalanok vagyunk a döntésben, hogy a rácspont illeszkedik-e a szakaszra, ott a két pontra illeszkedő egyenes egyenletével gyorsan lehet dönteni.)



b) Az egyenesek ismeretében az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ordinátákhoz rendre 2, 3, 5, 7, 8, 7, 3 pont tartozik. Vagyis összesen 35 rácspont van az ötszög belsejében.

c) Számításaink szerint: $h = 8$, $b = 35$. Ezeket a megadott képletbe behelyettesítve:

$$t = \frac{h + 2b - 2}{2} = \frac{8 + 2 \cdot 35 - 2}{2} = 38.$$

d) Az ötszög befoglalható egy 12-szer 8-as téglalapba. A téglalapból négy derékszögű háromszöget és egy kis téglalapot kell levágnunk, hogy az $ABCDE$ ötszöget kapjuk. Vagyis: $t = 96 - 30 - 2 - 6 - 12 - 8 = 38$.

9. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:*

$$\log_3 \log_2(4x^2) + \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} = 1. \qquad (16\ pont)$$

Megoldás. A feladat értelmezési tartománya: $x > 0$.
Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\log_3 \log_2(4x^2) - \log_3 \log_{\frac{1}{2}} (x)^{-1} = 1,$$

$$\log_3 \log_2(4x^2) - \log_3 \log_2 x = 1,$$

$$\log_3 \frac{\log_2(4x^2)}{\log_2 x} = 1 = \log_3 3.$$

A logaritmus függvény kölcsönös egyértelműsége miatt:

$$\frac{\log_2(4x^2)}{\log_2 x} = 3, \qquad \text{vagyis} \qquad \log_2(4x^2) = 3 \log_2 x.$$

Ezt így is írhatjuk: $\log_2(4x^2) = \log_2 x^3$, azaz $4x^2 = x^3$. Vagyis az egyenlet egyedüli megoldása az értelmezési tartományon: $x = 4$.