I. rész

1. Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét:

$$a = \lg 1000^{2007} + \lg 0{,}001^{2007};$$

(*2 pont*)

$$b = (2005! + 2006!)\left(\frac{1}{2006!} - \frac{1}{2007!}\right);$$

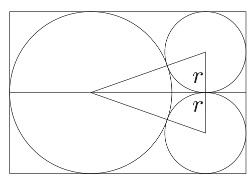
(*4 pont*)

$$c = \left(\frac{2}{\sqrt{2007}-1}\right)\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2007}}\right).$$

(*5 pont*)

2. Egy négyzet alapú egyenes hasáb (négyzetes oszlop) egy oldallapjának átlója 10 cm, a testátlója 12,5 cm. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata? (*12 pont*)

3. Egy téglalap alakú parkban az *ábra* szerint három egymást és a téglalap oldalait érintő kör alakú virágágyást, valamint a park kerületén, a körök mentén, és a körök középpontjaira illeszkedő, az ábrára berajzolt összes vonal mentén utakat létesítettek. A két kisebb, egyenlő méretű ágyás sugara $r = 15$ m.

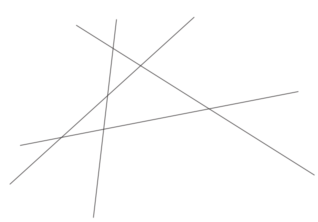


a) Mekkora a nagy kör sugara? (*2 pont*)
b) Milyen hosszú a teljes úthálózat? (*8 pont*)
c) Hány százalékát tölti ki a három kör az egész téglalap területének? (*4 pont*)

4. Adott a síkban 10 általános helyzetű egyenes. (Nincs köztük két párhuzamos, és bármely metszésponton csak két egyenes halad át.)

a) Hány metszéspontja van a 10 egyenesnek? (*2 pont*)
b) Hány egymást nem fedő szakaszt, és hány félegyenest számolhatunk össze a 10 egyenesen? (*5 pont*)
c) Véletlenszerűen kiválasztunk a keletkező egyenesdarabok (szakaszok és félegyenesek) közül kettőt. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott két egyenesdarab azonos típusú lesz? (Mindegyik szakasz, vagy mindegyik félegyenes.) (*8 pont*)

(Pl. ezen az *ábrán* 4 általános helyzetű egyenesnél 6 metszéspontot, 8 szakaszt és 8 félegyenest, azaz 16 egyenesdarabot számolhatunk össze.)



II. rész

5. Adott a koordinátarendszerben az $A(2;2)$ és $B(9;9)$ pont. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely illeszkedik az A és B pontokra és érinti az x tengelyt. (*16 pont*)

6. Írjuk fel a páratlan természetes számokat a következő háromszög alakú táblázatba úgy, hogy minden sorban eggyel több szám szerepeljen, mint az előzőben:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 5 & & \\ & 7 & & 9 & & 11 & \\ 13 & & 15 & & 17 & & 19 \\ 21 & & 23\ldots & & & & \end{array}$$

a) Melyik szám áll a 20. sor elején? (*3 pont*)

b) Adjuk meg n függvényében, hogy melyik szám áll az n-edik sor elején, a végén, és mennyi a sorban szereplő számok összege. (*6 pont*)

c) Mennyi lesz a számok összege abban a sorban, amelyben a 2007-es szám szerepel? (*3 pont*)

d) Az első 100 sorból kiválasztunk véletlenszerűen egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a választott sorban a számok összege négyzetszám? (*4 pont*)

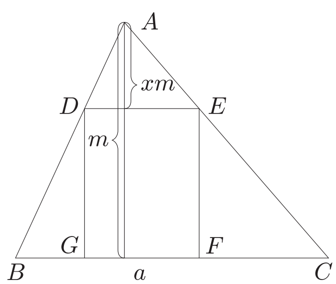
7. *a*) Milyen valós x-ek elégítik ki a $4^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 9^{x+1} = 0$ egyenletet? (*7 pont*)

b) Milyen $[0°; 180°]$ intervallumba eső x szögek elégítik ki a következő egyenletet?

$$2\sin^2 x + 13\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 6.$$

(*9 pont*)

8. A T területű ABC hegyesszögű háromszögbe írjunk téglalapot az *1. ábra* szerint.

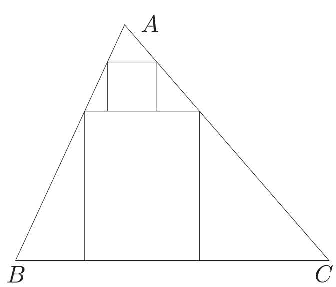


1. ábra

a) Az ADE háromszög A-ból induló magassága x-szerese az ABC A-ból induló m magasságának $(0 < x < 1)$. Fejezzük ki az ADE háromszög és a $DEFG$ téglalap területét T és x segítségével. (*4 pont*)

b) Legfeljebb hányad részét tölti ki a téglalap az ABC háromszög területének? (*5 pont*)

c) Legfeljebb hányad részét tölti ki a *2. ábra* szerint berajzolt két téglalap az ABC háromszög területének? (*7 pont*)



2. ábra

9. Melyek azok az n természetes számok, amelyekre teljesül a következő két feltétel?

– Az $\dfrac{1}{n}$ tizedes tört alakja véges.

– Az n^2-nek háromszor annyi pozitív osztója van, mint az n-nek. (*16 pont*)