# I. rész

**1.** *Oldjuk meg a valós számok halmazán a $27^x < 6 \cdot 9^x + 3^{x+3}$ egyenlőtlenséget.* (*12 pont*)

**Megoldás.** A $3^x$ helyére $a$-t helyettesítve az egyenlőtlenség $a^3 - 6a^2 - 27a < 0$ alakba írható. Oszthatjuk mindkét oldalt $a$-val, mivel $3^x > 0$ minden $x$ esetén. Az $a^2 - 6a - 27 < 0$ egyenlőtlenséget $(a-9)(a+3) < 0$ alakban is írhatjuk. Az egyenlőtlenség megoldása: $-3 < a < 9$, azaz $-3 < 3^x < 3^2$. Mivel $3^x > 0$ minden $x$ esetén, azért $x < 2$.

**2.** *Egy háromszög leghosszabb oldalának hossza* 16, *legrövidebb oldalának hossza pedig* 10. *A háromszög legnagyobb szöge kétszer akkora, mint a legkisebb. Mekkorák a háromszög szögei és hiányzó oldala?* (*12 pont*)

**Megoldás.** A leghosszabb oldallal szemben van a legnagyobb szög, a legkisebbel szemben a legkisebb, tehát ha $a = 16$ és $b = 10$, akkor $\alpha = 2\beta$. Felírható a szinusztétel:

$$\frac{16}{10} = \frac{\sin 2\beta}{\sin\beta}.$$

Felhasználva, hogy $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$, kapjuk, hogy $1{,}6 = 2\cos\beta$, azaz $\cos\beta = 0{,}8$. Ebből $\beta \approx 36{,}9°$, $\alpha = 73{,}8°$ és $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 69{,}3°$. Ezek megfelelnek a $\beta < \gamma < \alpha$ feltételnek.

A hiányzó $c$ oldalt koszinusztétellel számolhatjuk ki: $c \approx 15{,}6$.

**3.** *Anna és Bence egy játékban négy szabályos dobókockát dobál. Anna nyer, ha a dobott számok között vannak egyenlők, Bence nyer, ha a dobott számok között van legalább egy* 6*-os. Amennyiben mindkét feltétel teljesül, a játék döntetlen; ha egyik feltétel sem teljesül, tovább játszanak.*

*a*) *Melyiküknek van nagyobb esélye a nyerésre?* (*7 pont*)

*b*) *Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy játék döntetlenre végződik?* (*6 pont*)

**Megoldás.** *a*) Mindkettőjük esetében az összes eset: $6^4 = 1296$.

Minden dobás különböző $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ esetben lesz, ezért az Anna számára kedvező esetek száma: $1296 - 360 = 936$.

Az, hogy a dobások között nincs 6-os, $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ esetben fordulhat elő, ezért a Bence számára kedvező esetek száma: $1296 - 625 = 671$.

Fentiekből következően Annának van nagyobb esélye nyerni.

*b*) Legyen $a$ azoknak a dobásoknak a száma, melyeknél Anna nyer, $b$ azoknak a száma, amikor Bence, $d$ a döntetlen esetek száma és $c$ azoké, amikor egyik sem teljesül (azaz sem 6-os, sem egyforma nincs a 4 dobás között).

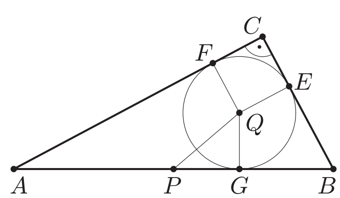
Tudjuk az *a*) részből, hogy $a + b + c + d = 1296$, $a + d = 936$ és $b + d = 671$, amiből $d - c = 936 + 671 - 1296 = 311$. Továbbá $c = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ (minden dobás különböző, és nincs 6-os közte), ezért $d = 311 + 120 = 431$.

A keresett valószínűség:

$$p = \frac{431}{1296} \approx 0{,}33.$$

**4.** *Az $ABC$ háromszög oldalainak hossza: $AB = 34$, $BC = 16$, $AC = 30$. A háromszög köré írható kör középpontja legyen $P$, a beírható kör középpontja $Q$. Számítsuk ki a $PQ$ szakasz hosszát.* (*14 pont*)

**Megoldás.** Mivel $16^2 + 30^2 = 34^2$, a háromszög derékszögű, így a $P$ pont az $AB$ átfogó felezőpontja. Használjuk az *ábra* jelöléseit.




A beírható kör sugara: $QE = QF = QG = \varrho$, a derékszögű háromszög területe: $t = 240$, a félkerülete: $s = 40$. A $t = \varrho s$ összefüggés alapján: $\varrho = 6$.

Tudjuk, hogy $ECFQ$ négyszög négyzet, így $EC = 6$, ezért $BE = BG = 10$, amiből $PG = 7$ következik.

A $PGQ$ derékszögű háromszögben:

$$PQ = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{85} \approx 9{,}22.$$

# II. rész

**5.** *Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletet:*

$$\sqrt{4-4x^2+4xy-y^2}=\log_x(y-2)+\log_{y-2}x.$$

(*16 pont*)

**Megoldás.** A gyökjel alatti kifejezést $4-(2x-y)^2$ alakba írva látható, hogy $4-(2x-y)^2\leq 4$, mivel $(2x-y)^2\geq 0$, így a bal oldal: $\sqrt{4-4x^2+4xy-y^2}\leq 2$ minden értelmezett $x$, $y$ esetén.

A jobb oldali kifejezés $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ miatt egy számnak és reciprokának az összege, amiről tudjuk, hogy pozitív szám esetén nagyobb vagy egyenlő 2-nél (egyenlőség akkor és csak akkor van, ha a szám 1), negatív számok esetén pedig kisebb vagy egyenlő $-2$-nél (ez most nem jöhet szóba, hiszen a bal oldal nem negatív).

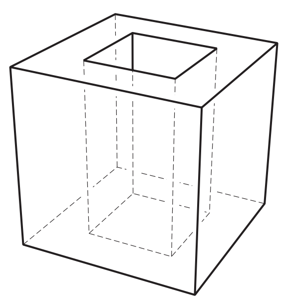
Az egyenlőség tehát csak úgy állhat fenn, ha a bal és a jobb oldal értéke is pontosan 2. Egyrészt $2x-y=0$, azaz $y=2x$, másrészt $\log_x(y-2)=1$, azaz $x=y-2$. Az így kapott egyenletrendszer megoldása az $x=2$, $y=4$ számpár, amely megoldása az eredeti egyenletnek is.

**6.** *Egy $a$ élű kockát átlyukasztunk az egyik lapjára merőlegesen. A kivágott rész egy olyan négyzetes oszlop, melynek alaplapja egy $b$ élű négyzet, magassága pedig $a$.*

*a) Igazoljuk, hogy ha a keletkezett test térfogata az eredeti kocka térfogatánál 25%-kal kisebb, akkor felszíne az eredeti felszínnél 25%-kal nagyobb.*

*b) Igazoljuk, hogy az előző állításban más szám nem írható a 25 helyére, azaz $k$%-os térfogatcsökkenés semmilyen $a$ és $b$ esetén nem járhat $k$%-os felszínnövekedéssel, ha $k\neq 25$.* (*16 pont*)

**Megoldás.** *a*) Az eredeti kocka térfogata: $a^3$, a négyzetes oszlopé: $b^2a$. A feltétel szerint $b^2a=\dfrac{1}{4}a^3$, amiből $b^2=\dfrac{1}{4}a^2$, azaz $a=2b$.



Az eredeti kocka felszíne: $6a^2$, a négyzetes oszlop kivágása után maradt test felszíne: $6a^2-2b^2+4ab$. Az $a=2b$ helyettesítéssel $24b^2$, illetve $24b^2-2b^2+8b^2=30b^2$ adódik. Ezzel az állítást igazoltuk, hiszen $30b^2=1{,}25\cdot 24b^2$.

*b*) Ha a kocka térfogata $k$%-kal csökken, akkor

$$b^2a=\frac{k}{100}a^3,\quad \text{amiből}\quad a=\frac{10b}{\sqrt{k}}.$$

Ha a felszín $k$%-kal nő, akkor

$$-2b^2+4ab=\frac{6a^2k}{100},$$

amiből $a=\dfrac{10b}{\sqrt{k}}$ helyettesítéssel rendezés után $k=25$ adódik.

**7.** *Egy osztály 30 tanulója írt dolgozatot matematikából. A dolgozatokra kapott osztályzatok módusza 2, mediánja 3,5, terjedelme 4, átlaga 3,2. Tudjuk továbbá, hogy 1-gyel több 4-es volt, mint 5-ös és a jegyek szórása kisebb, mint 1,36. Határozzuk meg a dolgozatra kapott osztályzatok gyakoriságát.* (*16 pont*)

**Megoldás.** A 3,5-es mediánból következik, hogy az osztályzatokat növekvő sorrendbe rendezve a két középső 3 és 4 (2 és 5 nem lehet, mert úgy nem lenne 4-es). Eszerint 15 db 4-es és 5-ös van, és mivel ezek közül 1-gyel több a 4-es, ez 8 db 4-est és 7 db 5-öst jelent.

Mivel az átlag 3,2, a jegyek összege $30\cdot 3{,}2=96$, ebből a 4-esek és 5-ösök összege $8\cdot 4+7\cdot 5=67$, azaz az 1-es, 2-es, 3-as osztályzatok összege 29.

Mivel 15 db 2-es összege 30 lenne, azért a jegyek között 1-gyel több 1-es van, mint 3-as, másrészt mivel 2 a módusz, a 2-esek száma legalább 9.

A fentiek csak kétféleképpen teljesülhetnek:

I. 10 db 2-es, 2 db 3-as és 3 db 1-es.

II. 12 db 2-es, 1 db 3-as és 2 db 1-es.

(A 14 db 2-es, 0 db 3-as és 1 db 1-es nem lehet, hiszen láttuk, hogy van 3-as.)

Ha a fenti két esetben kiszámítjuk a jegyek szórását, azt kapjuk, hogy csak a II. esetben kisebb 1,36-nál.

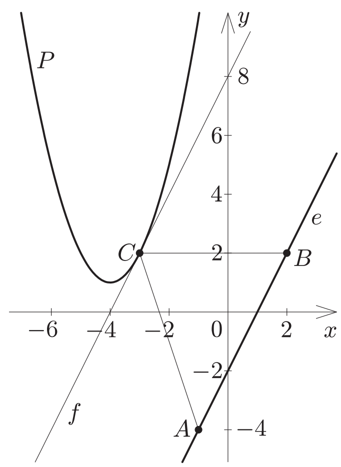
Az egyes osztályzatok gyakorisága tehát: 2 db 1-es, 12 db 2-es, 1 db 3-as, 8 db 4-es és 7 db 5-ös.

**8.** *Az e egyenes egyenlete:* $2x - y = 2$*, a* $P$ *parabola egyenlete:* $y = x^2 + 8x + 17$*. Az* $A$ *és a* $B$ *pontok illeszkednek az e egyenesre, a* $C$ *pont pedig a* $P$ *parabolára. Az* $A$ *pont abszcisszája* $-1$*, a* $B$ *pont ordinátája* $2$*.*

*Adjuk meg a* $C$ *pont koordinátáit úgy, hogy az* $ABC$ *háromszög területe a lehető legkisebb legyen. Mekkora ez a minimális terület?* (*16 pont*)

**Megoldás.** Az $e$ egyenes egyenletébe behelyettesítéssel megkapjuk az $A$ és $B$ pontok hiányzó koordinátáit: $A(-1;-4)$, $B(2;2)$.

Az $ABC$ háromszög területe akkor lesz a legkisebb, ha az $AB$ oldalhoz tartozó magasság a legkisebb. A feladat tehát megkeresni a $P$ parabolának az $e$ egyeneshez legközelebb fekvő pontját. Ha $f$ az $e$-vel párhuzamos, $P$ parabolát érintő egyenes, akkor a keresett $C$ pont az $f$ egyenesnek az a pontja, melyben $f$ a $P$ parabolát érinti.




Mivel $e\colon y = 2x-2$, azért $f\colon y = 2x+c$ ($c \in \mathbb{R}$), és ezt $P$ egyenletébe helyettesítve rendezés után az $x^2+6x+17-c = 0$ egyenletet kapjuk. Az $f$ egyenes akkor és csak akkor érinti a parabolát, ha a fenti egyenlet diszkriminánsa 0, azaz $36 - 68 + 4c = 0$, amiből $c = 8$. Ezt a fenti egyenletbe helyettesítve adódik a megfelelő $C$ pontnak először az $x$, majd az $y$ koordinátája: $C(-3;2)$.

Mivel $BC = 5$, a $BC$ oldalhoz tartozó magasság pedig 6, azért az $ABC$ háromszög területe: $\dfrac{5 \cdot 6}{2} = 15$.

**9.** *Három kétjegyű természetes szám egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagja, a három szám összege* 198*. A három számot növekvő sorrendben egymás mögé írva, a kapott* 6*-jegyű szám osztható* 2009*-cel. Melyik ez a három szám?* (*16 pont*)

**Megoldás.** A három kétjegyű szám közül a középső $198 : 3 = 66$, az első $66 - d$, a harmadik $66 + d$ ($d > 0$, $d \in \mathbb{Z}$).

A belőlük kapott hatjegyű szám: $10\,000(66 - d) + 100 \cdot 66 + 66 + d$, azaz a műveletek elvégzése után

$$666\,666 - 9\,999d = 99(6734 - 101d).$$

Mivel $2009 = 7^2 \cdot 41$, azért $7^2 \cdot 41 \mid 3^2 \cdot 11 \cdot (6734 - 101d)$, ami csak úgy lehet, ha

$$2009 \mid (6734 - 101\,d).$$

A $d > 0$ feltétel miatt a $6734 - 101d$ csak 2009, $2 \cdot 2009$ vagy $3 \cdot 2009$ lehet. Az első két esetben $d$-re nem egész számot kapunk, a harmadik esetben $d = 7$.

Tehát a három kétjegyű szám: 59, 66, 73, a belőlük alkotott hatjegyű szám pedig: 596 673.