I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a* $27^x < 6 \cdot 9^x + 3^{x+3}$ *egyenlőtlenséget.* (*12 pont*)

Megoldás. A 3^x helyére a-t helyettesítve az egyenlőtlenség $a^3 - 6a^2 - 27a < 0$ alakba írható. Oszthatjuk mindkét oldalt a-val, mivel $3^x > 0$ minden x esetén. Az $a^2 - 6a - 27 < 0$ egyenlőtlenséget $(a-9)(a+3) < 0$ alakban is írhatjuk. Az egyenlőtlenség megoldása: $-3 < a < 9$, azaz $-3 < 3^x < 3^2$. Mivel $3^x > 0$ minden x esetén, azért $x < 2$.

2. *Egy háromszög leghosszabb oldalának hossza* 16*, legrövidebb oldalának hossza pedig* 10*. A háromszög legnagyobb szöge kétszer akkora, mint a legkisebb. Mekkorák a háromszög szögei és hiányzó oldala?* (*12 pont*)

Megoldás. A leghosszabb oldallal szemben van a legnagyobb szög, a legkisebbel szemben a legkisebb, tehát ha $a = 16$ és $b = 10$, akkor $\alpha = 2\beta$. Felírható a szinusztétel:

$$\frac{16}{10} = \frac{\sin 2\beta}{\sin \beta}.$$

Felhasználva, hogy $\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta$, kapjuk, hogy $1{,}6 = 2 \cos \beta$, azaz $\cos \beta = 0{,}8$. Ebből $\beta \approx 36{,}9°$, $\alpha = 73{,}8°$ és $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 69{,}3°$. Ezek megfelelnek a $\beta < \gamma < \alpha$ feltételnek.

A hiányzó c oldalt koszinusztétellel számolhatjuk ki: $c \approx 15{,}6$.

3. *Anna és Bence egy játékban négy szabályos dobókockát dobál. Anna nyer, ha a dobott számok között vannak egyenlők, Bence nyer, ha a dobott számok között van legalább egy* 6*-os. Amennyiben mindkét feltétel teljesül, a játék döntetlen; ha egyik feltétel sem teljesül, tovább játszanak.*

a) Melyiküknek van nagyobb esélye a nyerésre? (*7 pont*)

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy játék döntetlenre végződik? (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Mindkettőjük esetében az összes eset: $6^4 = 1296$.

Minden dobás különböző $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ esetben lesz, ezért az Anna számára kedvező esetek száma: $1296 - 360 = 936$.

Az, hogy a dobások között nincs 6-os, $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ esetben fordulhat elő, ezért a Bence számára kedvező esetek száma: $1296 - 625 = 671$.

Fentiekből következően Annának van nagyobb esélye nyerni.

b) Legyen a azoknak a dobásoknak a száma, melyeknél Anna nyer, b azoknak a száma, amikor Bence, d a döntetlen esetek száma és c azoké, amikor egyik sem teljesül (azaz sem 6-os, sem egyforma nincs a 4 dobás között).

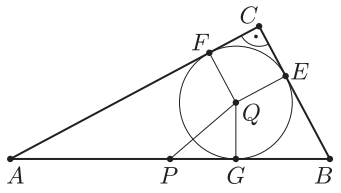
Tudjuk az *a*) részből, hogy $a + b + c + d = 1296$, $a + d = 936$ és $b + d = 671$, amiből $d - c = 936 + 671 - 1296 = 311$. Továbbá $c = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ (minden dobás különböző, és nincs 6-os közte), ezért $d = 311 + 120 = 431$.

A keresett valószínűség:

$$p = \frac{431}{1296} \approx 0{,}33.$$

4. *Az* ABC *háromszög oldalainak hossza:* $AB = 34$*,* $BC = 16$*,* $AC = 30$*. A háromszög köré írható kör középpontja legyen* P*, a beírható kör középpontja* Q*. Számítsuk ki a* PQ *szakasz hosszát.* (*14 pont*)

Megoldás. Mivel $16^2 + 30^2 = 34^2$, a háromszög derékszögű, így a P pont az AB átfogó felezőpontja. Használjuk az *ábra* jelöléseit.



A beírható kör sugara: $QE = QF = QG = \varrho$, a derékszögű háromszög területe: $t = 240$, a félkerülete: $s = 40$. A $t = \varrho s$ összefüggés alapján: $\varrho = 6$.

Tudjuk, hogy $ECFQ$ négyszög négyzet, így $EC = 6$, ezért $BE = BG = 10$, amiből $PG = 7$ következik.

A PGQ derékszögű háromszögben:

$$PQ = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{85} \approx 9{,}22.$$

II. rész

5. *Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletet:*

$$\sqrt{4-4x^2+4xy-y^2}=\log_x(y-2)+\log_{y-2}x.$$

(*16 pont*)

Megoldás. A gyökjel alatti kifejezést $4-(2x-y)^2$ alakba írva látható, hogy $4-(2x-y)^2\le 4$, mivel $(2x-y)^2\ge 0$, így a bal oldal: $\sqrt{4-4x^2+4xy-y^2}\le 2$ minden értelmezett x, y esetén.

A jobb oldali kifejezés $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ miatt egy számnak és reciprokának az összege, amiről tudjuk, hogy pozitív szám esetén nagyobb vagy egyenlő 2-nél (egyenlőség akkor és csak akkor van, ha a szám 1), negatív számok esetén pedig kisebb vagy egyenlő -2-nél (ez most nem jöhet szóba, hiszen a bal oldal nem negatív).

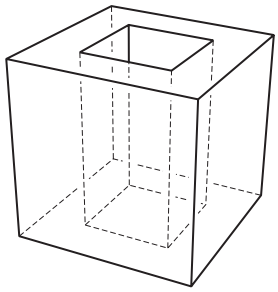
Az egyenlőség tehát csak úgy állhat fenn, ha a bal és a jobb oldal értéke is pontosan 2. Egyrészt $2x-y=0$, azaz $y=2x$, másrészt $\log_x(y-2)=1$, azaz $x=y-2$. Az így kapott egyenletrendszer megoldása az $x=2$, $y=4$ számpár, amely megoldása az eredeti egyenletnek is.

6. *Egy a élű kockát átlyukasztunk az egyik lapjára merőlegesen. A kivágott rész egy olyan négyzetes oszlop, melynek alaplapja egy b élű négyzet, magassága pedig a.*

a) Igazoljuk, hogy ha a keletkezett test térfogata az eredeti kocka térfogatánál 25%-kal kisebb, akkor felszíne az eredeti felszínnél 25%-kal nagyobb.

b) Igazoljuk, hogy az előző állításban más szám nem írható a 25 helyére, azaz k%-os térfogatcsökkenés semmilyen a és b esetén nem járhat k%-os felszínnövekedéssel, ha $k\neq 25$. (*16 pont*)

Megoldás. *a)* Az eredeti kocka térfogata: a^3, a négyzetes oszlopé: b^2a. A feltétel szerint $b^2a=\dfrac{1}{4}a^3$, amiből $b^2=\dfrac{1}{4}a^2$, azaz $a=2b$.



Az eredeti kocka felszíne: $6a^2$, a négyzetes oszlop kivágása után maradt test felszíne: $6a^2-2b^2+4ab$. Az $a=2b$ helyettesítéssel $24b^2$, illetve $24b^2-2b^2+8b^2=30b^2$ adódik. Ezzel az állítást igazoltuk, hiszen $30b^2=1{,}25\cdot 24b^2$.

b) Ha a kocka térfogata k%-kal csökken, akkor

$$b^2a=\frac{k}{100}a^3,\quad \text{amiből}\quad a=\frac{10b}{\sqrt{k}}.$$

Ha a felszín k%-kal nő, akkor

$$-2b^2+4ab=\frac{6a^2k}{100},$$

amiből $a=\dfrac{10b}{\sqrt{k}}$ helyettesítéssel rendezés után $k=25$ adódik.

7. *Egy osztály 30 tanulója írt dolgozatot matematikából. A dolgozatokra kapott osztályzatok módusza 2, mediánja 3,5, terjedelme 4, átlaga 3,2. Tudjuk továbbá, hogy 1-gyel több 4-es volt, mint 5-ös és a jegyek szórása kisebb, mint 1,36. Határozzuk meg a dolgozatra kapott osztályzatok gyakoriságát.* (*16 pont*)

Megoldás. A 3,5-es mediánból következik, hogy az osztályzatokat növekvő sorrendbe rendezve a két középső 3 és 4 (2 és 5 nem lehet, mert úgy nem lenne 4-es). Eszerint 15 db 4-es és 5-ös van, és mivel ezek közül 1-gyel több a 4-es, ez 8 db 4-est és 7 db 5-öst jelent.

Mivel az átlag 3,2, a jegyek összege $30\cdot 3{,}2=96$, ebből a 4-esek és 5-ösök összege $8\cdot 4+7\cdot 5=67$, azaz az 1-es, 2-es, 3-as osztályzatok összege 29.

Mivel 15 db 2-es összege 30 lenne, azért a jegyek között 1-gyel több 1-es van, mint 3-as, másrészt mivel 2 a módusz, a 2-esek száma legalább 9.

A fentiek csak kétféleképpen teljesülhetnek:

I. 10 db 2-es, 2 db 3-as és 3 db 1-es.

II. 12 db 2-es, 1 db 3-as és 2 db 1-es.

(A 14 db 2-es, 0 db 3-as és 1 db 1-es nem lehet, hiszen láttuk, hogy van 3-as.)

Ha a fenti két esetben kiszámítjuk a jegyek szórását, azt kapjuk, hogy csak a II. esetben kisebb 1,36-nál.

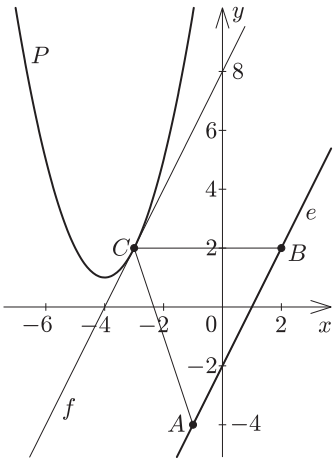
Az egyes osztályzatok gyakorisága tehát: 2 db 1-es, 12 db 2-es, 1 db 3-as, 8 db 4-es és 7 db 5-ös.

8. *Az e egyenes egyenlete: $2x - y = 2$, a P parabola egyenlete: $y = x^2 + 8x + 17$. Az A és a B pontok illeszkednek az e egyenesre, a C pont pedig a P parabolára. Az A pont abszcisszája -1, a B pont ordinátája 2.*

Adjuk meg a C pont koordinátáit úgy, hogy az ABC háromszög területe a lehető legkisebb legyen. Mekkora ez a minimális terület? (*16 pont*)

Megoldás. Az e egyenes egyenletébe behelyettesítéssel megkapjuk az A és B pontok hiányzó koordinátáit: $A(-1; -4)$, $B(2; 2)$.

Az ABC háromszög területe akkor lesz a legkisebb, ha az AB oldalhoz tartozó magasság a legkisebb. A feladat tehát megkeresni a P parabolának az e egyeneshez legközelebb fekvő pontját. Ha f az e-vel párhuzamos, P parabolát érintő egyenes, akkor a keresett C pont az f egyenesnek az a pontja, melyben f a P parabolát érinti.



Mivel $e\colon y = 2x-2$, azért $f\colon y = 2x+c$ ($c \in \mathbb{R}$), és ezt P egyenletébe helyettesítve rendezés után az $x^2+6x+17-c = 0$ egyenletet kapjuk. Az f egyenes akkor és csak akkor érinti a parabolát, ha a fenti egyenlet diszkriminánsa 0, azaz $36 - 68 + 4c = 0$, amiből $c = 8$. Ezt a fenti egyenletbe helyettesítve adódik a megfelelő C pontnak először az x, majd az y koordinátája: $C(-3; 2)$.

Mivel $BC = 5$, a BC oldalhoz tartozó magasság pedig 6, azért az ABC háromszög területe: $\dfrac{5 \cdot 6}{2} = 15$.

9. *Három kétjegyű természetes szám egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagja, a három szám összege 198. A három számot növekvő sorrendben egymás mögé írva, a kapott 6-jegyű szám osztható 2009-cel. Melyik ez a három szám?* (*16 pont*)

Megoldás. A három kétjegyű szám közül a középső $198 : 3 = 66$, az első $66 - d$, a harmadik $66 + d$ ($d > 0$, $d \in \mathbb{Z}$).

A belőlük kapott hatjegyű szám: $10\,000(66 - d) + 100 \cdot 66 + 66 + d$, azaz a műveletek elvégzése után

$$666\,666 - 9\,999d = 99(6734 - 101d).$$

Mivel $2009 = 7^2 \cdot 41$, azért $7^2 \cdot 41 \mid 3^2 \cdot 11 \cdot (6734 - 101d)$, ami csak úgy lehet, ha

$$2009 \mid (6734 - 101\,d).$$

A $d > 0$ feltétel miatt a $6734 - 101d$ csak 2009, $2 \cdot 2009$ vagy $3 \cdot 2009$ lehet. Az első két esetben d-re nem egész számot kapunk, a harmadik esetben $d = 7$.

Tehát a három kétjegyű szám: 59, 66, 73, a belőlük alkotott hatjegyű szám pedig: 596 673.