

I.

1, 23, 456, 790

Írjuk fel azt a legkisebb természetes számot, amely a keretben nincs megemlítve.

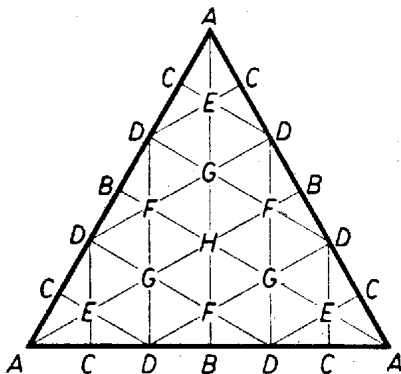
**Megoldás:** A keret nemcsak a megadott négy számot tartalmazza, hanem a feladat szövegét is. Ezért nem lehet teljesíteni a felszólítást, az ugyanis ellentmondást tartalmaz. Ugyanis a főmondat rámutat arra – más szóval: említi azt, amit fel kíván írni; és éppen ennél a megemlítésnél fogva nincs meg a kívánt valaminak a (jelzői) mellékmondatban közölt tulajdonsága, hogy ti. nincs megemlítve a keretben, élesebben mondatban.

Hogy a felírni kívánt valami egy szám, ez lényegtelen; az ellentmondás a következőkben van benne: „Írjuk fel *azt* ..., ami ebben a mondatban *nincs megemlítve*”.

Katona Mária (Budapest, Szilágyi E. lg. I. o. t.) dolgozata, kiegészítéssel

**Megjegyzés:** Egy dolgozat szerint: 8222; a megfelelő szám 8, mert a 7 és a 9 között nincs szám. A feladat kissé cseles (kétértelmű), a 2-re is lehetett gondolni, ..., de ez előfordul a 23-ban 8221;. További 18 rövidebb dolgozat szintén a 8-at, 11 dolgozat a 2-t tartja megoldásnak. – Eszerint legalább 19-en nem tudtak különbséget tenni szám és számjegy között; olyasmi ez, mintha összekevernők az írott szót a betűvel, a kimondott szót a hanggal. Másrészt 11-en nem érezték meg, hogy a „fogas” kérdésekben valóban van valami „cseles”, vagy legalábbis szokatlan, és egészen gyermekesen „lépre mentek”.

II. Hány háromszög látható a mellékelt ábrán?



**Megoldás:** A szimmetriákat felhasználva a háromszögek megszámlálását egyszerűsíthetjük, a szimmetrikus csomópontok az ábrán azonos betűvel vannak jelölve.<sup>1</sup> A rendszerezésben a háromszögek alakját is figyelembe vesszük. 8212;- A szereplő 6 irány közül bármely 2 között a szög  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  vagy  $90^\circ$ , így a háromszögekben fellépő legkisebb szög  $30^\circ$ , és a legnagyobb szög  $180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$ . Eszerint 3-féle háromszög-alak fordul elő, szögeik:  $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ (T_1)$ ;  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ (T_2)$ ;  $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ (T_3)$ . Célszerű még a háromszögek területét is megadni, egységnek az előforduló legkisebb  $T_2$ -alakú háromszög területét véve.

Az  $T_1$  alak legkisebb előfordulása a 2 egységnyi  $ADE$ , ill.  $DDF$  típus, ilyen 6, ill. 3 van; ennek lineárisan 2-, ill. 3-szoros nagyítása a 8, ill. 18 egységnyi  $ADG$ , ill.  $AAH$  típus, 6, ill. 3 van belőle, tehát  $T_1$  alakú háromszög  $6 + 3 + 6 + 3 = 18$  van.

A  $T_3$  alak 4-féle nagyságban fordul elő, legkisebb a 2 egységnyi  $DEG$ ,  $DFG$  és  $FGH$  típus 68212;6 példányban, ennek 2-, 3-, ill.  $3\sqrt{3}$ -szoros nagyítása a 8, 18, 54 egységnyi  $DFG$ ,  $DDD$ ,  $AAA$  típus, 6, 2, ill. 1 példányban, ezek szerint  $18 + 6 + 2 + 1 = 27$  szabályos háromszöget látunk.

Végül a  $T_2$  alak 68212;6  $AEC$ ,  $DEC$ ,  $DFB$  típusú 1 egységnyi háromszöggel, továbbá ennek 6-féle nagyításával szerepel: 2, 3, ill. 4-szeres nagyításai a 4, 9, 16 egységnyi  $AGD$  és  $DGD$ , ill.  $AHB$  és  $DDC$ , ill.  $AFD$  típusú háromszögek, és  $\sqrt{3}$ ,  $2\sqrt{3}$ ,  $3\sqrt{3}$ -szoros nagyításai a 3, 12, 27 egységnyi  $ADC$ ,  $ADD$ ,  $AAB$  típusú háromszögek, valamennyi 6 példányban, ilyen háromszög tehát  $11 \cdot 6 = 66$  van az ábrán.

Ezek szerint a háromszögek összes száma  $18 + 27 + 66 = 111$ .

S. Nagy Erzsébet (Makó, József A. g. IV. o. t.)

**Megjegyzések:** 1. Más rendszerezés: minden egyes  $A$  típusú csomópontban 6  $T_1$  alakú háromszögnek  $30^\circ$ -os szöge van, 10, ill. 6  $T_2$  alakúnak  $30^\circ$ -, ill.  $60^\circ$ -os szöge van, végül 1  $T_3$  alakúnak  $60^\circ$ -os szöge, tehát egy ilyen csúcs összesen 23 háromszöghöz tartozik hozzá. Hasonlóan minden  $B, C, \dots, G$  típusú csomópont 6, 4, 18, 8, 11, 14 háromszögnek, a  $H$  csomópont pedig 15 háromszögnek csúcsa. E számokat a megfelelő típusú csomópontok 3, 3, 6, 63, 3, 3, 1-es létszámával szorozva  $69 + 18 + 24 + 108 + 24 + 33 + 42 + 15 = 333$  háromszögcúscot kapunk, és így a háromszögek száma 111.

2. A legtöbbször előforduló téves eredmény 105, ezekből többnyire a 16 egységnyi  $AFD$  típusú háromszögek száma hiányzik.

III. Egy 3 cm élű sajtókockát 1 cm élű kockákra akarunk szétvágni. Legalább hány vágás szükséges ehhez, ha a darabokat már a második vágás előtt is átrendezhetjük, de vágás alatt nem nyúlhatunk hozzájuk? – Hány vágással érünk

<sup>1</sup> Az eredeti ábrán nem volt betűzés.

célhoz, ha egy  $6 \times 9 \times 20$  cm-es és egy  $7 \times 10 \times 30$  cm-es téglá alakú sajtötömböt akarunk ugyancsak köbcentiméteres darabokra vágni? (A kés – vagy kifeszített húr – hossza „élég nagy”.)

**Megoldás:** Egy egyenes rúd  $v$  vágással legfeljebb  $2^v$  darabra vágható szét, ha minden vágás előtt valamennyi vágni kívánt darabot párhuzamos nyalábba fogva tesszük a kés alá. Fordítva: ha egy rudat a fenti módon  $n$  részre akarunk vágni és  $2^{v-1} < n < 2^v$ , akkor ehhez legalább  $v$  vágásra van szükség. Ha a részeket egyenlőknek kívánjuk, akkor akár  $n = 2k$ , akár  $n = 2k + 1$  esetén az első vágásban pl. úgy vághatunk, hogy egyik rész  $k/n$ -ed része legyen a rúdnak, azonban semmi esetre sem hagyhatunk  $2^{v-1}/n$ -résznél hosszabb darabot, különben ennek a szét vágása is legalább  $v$  vágást igényel.

Így a sajtökocka mindhárom kiterjedésének irányában 2 vágásra van szükség, összesen 6-ra, mert  $2^1 < 3 \leq 2^2$ -ből  $v = 2$ . Ezt abból is beláthatjuk, hogy a  $3^3 = 27$  db kis sajtökocka közül 1 teljesen „héjatlan”; lesz, és ennek mind a 6 lapját külön vágással keli kialakítanunk.

A téglatestek él-méretei alapján mindkét esetben  $V = v_1 + v_2 + v_3 = 3 + 4 + 5 = 12$  (alkalmasan elhelyezett) vágásra van szükség. Ugyanis a háromirányú vágások közben hiábavaló volna az eljárást avval siettetni próbálni, hogy némely, valamelyik irányban már csak 1 cm kiterjedésű, és emiatt a vágásból átmenetileg kimaradó darabot elforgatva tegyünk a kés alá, hiszen az el nem forgatott darabok miatt a megállapított számú vágást úgyis el kell végeznünk.

*Pósch Margit* (Budapest, Veres Pálné lg. I I I . o. t.)

*Megjegyzés:* A dolgozatok nem vették figyelembe a feladat fogalmazásának azt a „fogas-cseles”; finomságát, hogy egy  $6 \times 9 \times 20$  és egy  $7 \times 10 \times 30$  cm-es tömböt akarunk szétvágni. Ehhez összesen 12 vágás elegendő, a kisebb tömb a nagyobb mellett mindig „elcsúszik”.

**IV. Péter, miután egy számnak kikereste a (tízes alapú) logaritmusát, így kiáltott fel: ezt úgy is megkaphattam volna, ha a számban a tizedes vesszőt egy hellyel elírom! Mi lehetett a szám?**

**Megoldás:** A tizedes vesszőnek egy hellyel való eltolása 10-zel való szorzás vagy osztás, ezért az  $x : \lg x$  arány értéke vagy 10, vagy 0,1. Az utóbbi lehetőség eszik, mert minden (pozitív) szám 10-es alapú logaritmsa kisebb a számnál. Keressünk  $x$ -re közelítő értéket grafikus úton a kapcsolat  $x/10 = \lg x$  alakjából. Az  $y = x/10$  egyenes az  $y = \lg x$  görbét először az  $x = 1$  és  $x = 1,5$  abszcisszáik között; másodszor pontosan  $x = 10$ -nél metszi. Valóban, 10 logaritmsa 1,0, Péter esetében valószínűleg nem erről a számról van szó.  $x = 1$ -nél  $\lg x = 0 < 1/10$ ,  $x = 1,5$ -nél  $\lg x = 0,1761 > 1,5/10 = 0,15$ . Hasonlóan  $\lg 1,3 = 0,1139 < 0,13$ ,  $\lg 1,4 = 0,1461 > 0,14$ , tehát  $1,3 < x < 1,4$ . Tovább finomítva  $\lg 1,3713 \approx 0,1371$  alapján a keresett szám:  $x \approx 1,3713$ .

*Fodor Anna* (Pécs, Janus Pannonius lg. II. o. t.)

*Megjegyzés.* Hasonló tulajdonságuk van egyrészt a 237,58; 3 550,2; 46 692; 576 040; 6 834 700; 78 975 000; 895 190 000, másrészt az 1,0238; 1,002 304 számoknak.

*Molnár Mária* (Sztálinváros, Kerpely A. kohóip. t. l. o. t.)

**V. Egy lapszéli elmosódott feljegyzésen ez olvasható:**

$$1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \dots + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{12},$$

ami nyilván nem igaz, hiszen minden zárójelből csak a legnagyobb tagot véve is többet kapunk a jobb oldali számnál. Ki lehet-e javítani az összefüggést, vagy egészen hibás az?

**Megoldás:** Képezve a bal és jobb oldal hányadosát  $n = 1, 2, 3$ -ra a következő értékeket kapjuk:  $1 : 1/2 = 2$ ;  $6 : 2 = 3$ ;  $20 : 5 = 4$ . Ebből sejtjük, hogy a hányados  $n + 1$ , és az összefüggést úgy lehet kijavítani, hogy a jobb oldal második tényezőjének  $(n + 1)^2$ -t vesszük. Teljes indukcióval be lehet bizonyítani, hogy így az összefüggés helyes.

*Bódis Jenő* (Veszprém, Vegyip. t. III. o. t.)

Legszebben megindokolt dolgozataikért könyvjutalmat kapnak:

*Katona Mária* (Budapest, Szilágyi E. gyak. lg. I. o. t.),

*Bollobás Béla* (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.),

*S. Nagy Erzsébet* (Makó, József A. g. IV. o. t.).

A vigaszdíjak sorsolásában – a fentiek kivételével – azok vettek részt, akik legalább két megoldást (azaz jó dolgozatot) küldtek be, ki-ki mindegyik dolgozatával. A nyertesek:

*Kohut Mátyás* (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.),

*Palka István* (Sátoraljaújhely, Kossuth L. g. II. o. t.),

*Pósch Margit* (Budapest, Veres Pálné lg. III. o. t.).

**Legalább két megoldást küldtek be** (zárójelben a megoldott kérdések száma): Bódis Jenő (2), Bollobás Béla (4), Bornes Klára (2), Fodor Anna (3), Horváth Kálmán (2), Katona Mária (4), Kohut Mátyás (2), Kolonits Ferenc (2), Molnár Mária (2), S. Nagy Erzsébet (3), Palka István (3), Pósch Margit (4), Sarkady Kamilla (2), Szilassi Lajos (2). – Egy megoldást küldött be: 10 tanuló.