

I. rész

1. Egy focicsapat 20 fős keretében 3 kapus, 6 hátvéd, 7 középpályás és 4 csatár van. Az egyik mérkőzésen 1 kapus, 4 hátvéd, 3 középpályás és 3 csatár fog szerepelni.

a) Hányféleképpen állíthatja ki az edző a kezdőcsapatot? (6 pont)

b) Az edző legalább 40 pontot szeretne elérni az első 15 összecsapáson.

Hányféleképpen történhet ez meg, ha nem számít a megszerzett pontok sorrendje? (A győzelemért 3, a döntetlenért 1, a vereségért 0 pont jár.) (5 pont)

Megoldás. a) 3 kapusból 1-et $\binom{3}{1} = 3$ -féleképpen, 6 hátvédből 4-et $\binom{6}{4} = 15$ -féleképpen, 7 középpályásból 3-at $\binom{7}{3} = 35$ -féleképpen, 4 csatárból 3-at $\binom{4}{3} = 4$ -féleképpen választhatunk.

Összesen $3 \cdot 15 \cdot 35 \cdot 4 = 6300$ -féleképpen választhatjuk ki a csapatot.

b) A lehetséges eredményeket (győzelmek, döntetlenek, vereségek) és a pontszámok összegét a következő táblázatban látjuk:

győzelmek	döntetlenek	vereségek	pontszámok összeg
15	0	0	45
14	1	0	43
14	0	1	42
13	2	0	41
13	1	1	40

13 győzelem és 2 vereség 39 pontot ér, 13-nál kevesebb győzelem esetén az elérhető maximális pontszám 39 (12 győzelem, 3 döntetlen, 0 vereség).

Összesen 5-féleképpen lehet legalább 40 pontot elérni.

2. Egy osztály félévi matematikajegyei a következőképpen alakultak:

osztályzat	1	2	3	4	5
gyakoriság	3	10	7	8	

a) Hányan kaptak jelest, ha tudjuk, hogy az osztályátlag 3,2 és 3,3 közé esik és az osztálylétszám páros? (9 pont)

b) Határozzuk meg az osztályzatok móduszát és mediánját. (4 pont)

Megoldás. Jelöljük az 5-ösök számát x -szel. Ekkor az átlag:

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + x \cdot 5}{3 + 10 + 7 + 8 + x} = \frac{76 + 5x}{28 + x}.$$

A feladat szövege szerint: $3,2 < \bar{x} < 3,3$.

$$3,2 < \frac{76 + 5x}{28 + x}, \quad \text{amiből} \quad 7,56 < x,$$

$$\frac{76 + 5x}{28 + x} < 3,3, \quad \text{amiből} \quad x < 9,65.$$

A kettő összevetésével: $7,56 < x < 9,65$.

Mivel x egész szám, ezért a lehetséges értékek: 8, 9, és tudjuk, hogy az osztálylétszám páros, így csak az $x = 8$, lehet, és ekkor az osztálylétszám 36.

Vagyis 8 tanuló kapott jeles osztályzatot. (Ekkor az átlag: $\bar{x} = \frac{116}{36} \approx 3,22$.)

b) A módusz a leggyakrabban előforduló elem, azaz $m = 2$.

A medián a nagyság szerinti sorrend 18. és a 19. elemének számtani közepe, azaz $M = 3$.

3. Egy 36 fős osztály öt éves érettségi találkozáján 32-en jelentek meg. Az elmondottakból kiderült, hogy a három leggyakoribb nyári úti cél Erdély, a Zemplén és az Órség volt. Erdélyben 18-an nyaraltak, az Órségben 21-en, míg a Zemplénten 17-en választották. 11-en voltak Erdélyben és az Órségben, 9-en az Órségben és a Zemplénben, míg 8-an Erdélyben és a Zemplénben. Ugyanannyian vannak azok, akik mindhárom helyen nyaraltak már, mint azok, akik a felsoroltak egyikén sem jártak.

a) Készítsünk Venn-diagrammot.

(9 pont)

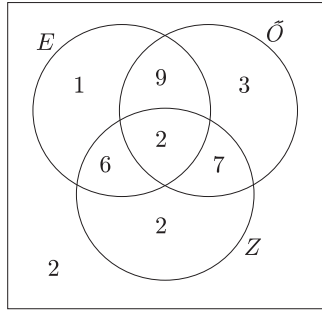
b) Mekkora a valószínűsége, hogy egy tanulót véletlenszerűen kiválasztva legalább két helyen nyaralt már a felsoroltak közül? (4 pont)

Megoldás. a) Jelölje E az Erdélyben, \tilde{O} az Őrségben, Z a Zemplénben járt emberek halmazát. Ekkor:

$$|E| + |\tilde{O}| + |Z| - |E \cap \tilde{O}| - |E \cap Z| - |\tilde{O} \cap Z| + |E \cap \tilde{O} \cap Z| + |\overline{E \cup \tilde{O} \cup Z}| = 32.$$

$18 + 21 + 17 - 11 - 8 - 9 + x + x = 32$, amiből $x = 2$.

Most már a Venn-diagramm elkészíthető.



b) A legalább két helyen megfordulók száma:

$$9 + 6 + 7 + 2 = 24.$$

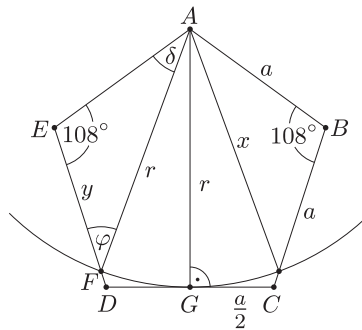
A keresett valószínűség:

$$P = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}.$$

4. Adott az $ABCDE$ 10 cm oldalhosszúságú szabályos ötszög, és az A középpontú k kör, amely érinti a CD oldalt. Legyen a kör és DE metszéspontja F . Mekkora az EF távolság? (14 pont)

Megoldás. Készítsünk ábrát. A koszinusztételből következik, hogy $x^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 108^\circ$, azaz $x^2 = 100 + 100 - 200 \cdot \cos 108^\circ$, amiből

$$x \approx 16,18.$$



A Pitagorasz-tételből adódik, hogy

$$r^2 = x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

amiből $r \approx 15,39$.

A szinusztétel alapján:

$$\frac{\sin \varphi}{a} = \frac{\sin 108^\circ}{r}, \quad \text{amiből} \quad \sin \varphi = \frac{10 \cdot \sin 108^\circ}{15,39} \approx 0,6180, \quad \text{azaz} \quad \varphi \approx 38,17^\circ.$$

Ekkor $\delta = 180^\circ - 108^\circ - 38,17^\circ = 33,83^\circ$.

Ismét a szinusztételt alkalmazzuk:

$$\frac{y}{\sin \delta} = \frac{a}{\sin \varphi}, \quad \text{amiből} \quad y = \frac{10 \cdot \sin 33,83^\circ}{\sin 38,17^\circ} \approx 9,01$$

adódik.

A keresett szakasz hossza kb. 9,01 cm.

II. rész

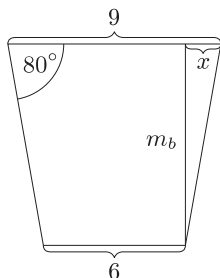
5. Agyagból szeretnénk csonkakúp alakú bögrét készíteni. Az alapkör belső átmérője 6 cm, a fedőköré 9 cm, a bögre oldala a vízszintessel 80° -os szöget zár be.

a) Hány deciliter folyadék fér a bögrébe? (6 pont)

A fedőkör külső átmérője 9,3 cm, a bögre fala mindenütt azonos vastagságú, az alja 4 mm vastag, a fülét 1,5 cm átmérőjű 15 cm magas egyenes körhengerből készítik. Az agyag sűrűsége $2,3 \text{ g/cm}^3$.

b) Mennyi 10 000 bögre össztömege? (A tömeget kg-ban adjuk meg.) (10 pont)

Megoldás. Készítsünk vázlatrajzot.



Mivel a bögre alapköreinek belső sugarai: $R_b = 4,5$, $r_b = 3$, ezért $x = R_b - r_b = 1,5$. Felírható:

$$\operatorname{tg} 80^\circ = \frac{m_b}{x} = \frac{m_b}{1,5},$$

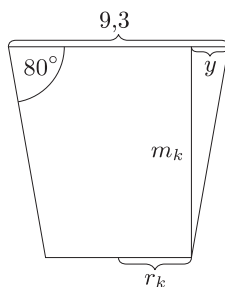
amiből a bögre belső magassága: $m_b = 1,5 \cdot \operatorname{tg} 80^\circ \approx 8,51$.

Ekkor a bögre térfogata:

$$V_b = \frac{(R_b^2 + R_b \cdot r_b + r_b^2) \cdot m_b \pi}{3} = \frac{(4,5^2 + 4,5 \cdot 3 + 3^2) \cdot 8,51 \pi}{3} \approx 381.$$

A bögre térfogata: kb. $381 \text{ cm}^3 \approx 0,381 \text{ dm}^3 = 3,81 \text{ dl}$.

b) A külső adatokkal is elkészítjük az ábrát. A bögre nagyobb alapkörének külső sugara: $R_k = 4,65$.



Tudjuk, hogy $m_k = m_b + 0,4 = 8,91$. Ekkor:

$$\operatorname{tg} 80^\circ = \frac{m_k}{y} = \frac{8,91}{y}, \quad \text{amiből: } y = \frac{8,91}{\operatorname{tg} 80^\circ} \approx 1,57.$$

Vagyis

$$r_k = \frac{9,3}{2} - 1,57 = 3,08.$$

$$V_k = \frac{(R_k^2 + R_k \cdot r_k + r_k^2) \cdot m_k \pi}{3} = \frac{(4,65^2 + 4,65 \cdot 3,08 + 3,08^2) \cdot 8,91 \pi}{3} \approx 423,9.$$

A fül térfogata: $V_{\text{fül}} = 0,75^2 \cdot \pi \cdot 15 \approx 26,5$.

A keresett térfogat: $V = V_k - V_b + V_{\text{fül}} = 423,9 - 381 + 26,5 = 69,4$.

Az összes bögre térfogata: $10\,000 \cdot 69,4 = 694\,000$.

Az összes bögre tömege: $m = 694\,000 \cdot 2,3 = 1\,596\,200$.

Vagyis a bögrék tömege kb. 1 596 200 g, ami kb. 1596 kg.

6. a) Határozzuk meg p értékét úgy, hogy a $9x^2 + (p + 16)x + 2,4p + 1$ kifejezés teljes négyzet legyen. (9 pont)
 b) Számoljuk ki a

$$\int_3^5 (9x^2 + 66x + 121) dx$$

kifejezés értékét.

(7 pont)

Megoldás. a) A kifejezés pontosan akkor teljes négyzet, ha a két zérushely egyenlő, azaz a diszkrimináns 0.

$$D = b^2 - 4ac = (p + 16)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (2,4p + 1) = 0, \quad \text{amiből} \quad p^2 - 54,4p + 220 = 0.$$

$$p_{1,2} = \frac{54,4 \pm \sqrt{2959,36 - 880}}{2} = \frac{54,4 \pm 45,6}{2}.$$

A kifejezés teljes négyzet lesz, ha $p_1 = 50$, $p_2 = 4,4$.

b)

$$\begin{aligned} &= 3 \cdot 5^3 + 33 \cdot 5^2 + 121 \cdot 5 - (3 \cdot 3^3 + 33 \cdot 3^2 + 121 \cdot 3) = \\ &= 1805 - 741 = 1064. \end{aligned}$$

7. Egy 15 millió lakosú országban egy cég vizsgálja a televízióműsorok nézettségét. 1500 háztartás tévékészülékeit szerelték fel egy olyan berendezéssel, amely mindig rögzíti, hogy ki, mikor, melyik csatorna adását nézte. Az így figyelt 3200 emberből – akik nem- és korbeli összetétele a valóságot tükrözi – tudják kiszámítani a nézettségi adatokat. A mintában szereplő 3200 fő kor és nem szerinti eloszlását az alábbi táblázat mutatja.

	0–17	18–27	28–38	39–49	50–65	66–
nők	540		240	220	290	110
férfiak	520		230	210	270	

- a) Töltsük ki a táblázat hiányzó adatait, ha tudjuk, hogy a 65 évnél idősebb férfiak száma 375 000, és a vizsgált személyek között 100-zal több a nő, mint a férfi. (6 pont)
 b) A szombat délelőtti gyermekműsort a minta 70 tagja nézte. Hány nézőt jelent ez országosan? (2 pont)
 c) Ha ebben az időben 1,7 millióan tévéztek, akkor az éppen tévézők hány százaléka nézte a gyermekműsort? (2 pont)
 d) Egy műsor nézettsége jó, ha az éppen akkor tévézők legalább 25%-a azt nézi. Egy péntek esti vetélkedőműsort 504-en néztek meg a mintából. Jó-e a műsor nézettsége, ha a lakosság 60%-a tévézett ekkor? (6 pont)

Megoldás. a) $\frac{375\,000}{15\,000\,000} \cdot 3200 = 80$, vagyis a mintában szereplő 65 évnél idősebb férfiak száma 80. Tudjuk, hogy $x + (x + 100) = 3200$, azaz $x = 1550$. Vagyis 1550 férfi és 1650 nő van a mintában.

$$1550 - 520 - 230 - 210 - 270 - 80 = 240,$$

$$1650 - 540 - 240 - 220 - 290 - 110 = 250.$$

Így megkaptuk a táblázat hiányzó adatait:

	0–17	18–27	28–38	39–49	50–65	66–
nők	540	250	240	220	290	110
férfiak	520	240	230	210	270	80

- b) $\frac{70}{3200} \cdot 15\,000\,000 = 328\,125$. Vagyis ez országosan 328 125 nézőt jelent.
 c) $\frac{328\,125}{1\,700\,000} \approx 0,193 = 19,3\%$. A tévézők kb. 19,3%-a nézte a gyermekműsort.
 d) $\frac{504}{3200} \cdot 15\,000\,000 = 2\,362\,500$, és $15\,000\,000 \cdot 0,6 = 9\,000\,000$, továbbá

$$\frac{2\,362\,500}{9\,000\,000} = 0,2625 = 26,25\%.$$

Vagyis a vizsgált műsornak jó a nézettsége.

8. Legyen A halmaz a $\left]-\frac{9\pi}{4}; 2\pi\right]$, B halmaz pedig a $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{2}\right]$ intervallum. Adjuk meg a

$$(7 \sin x - 2)^2 = (5 \sin x - 6)^2 - 4(\sin x + 2)$$

egyenlet megoldásait az $A \setminus B$ és az $A \cap B$ halmazokon.

(16 pont)

Megoldás. A műveletek elvégzése és a $\sin x = y$ helyettesítés után kapjuk:

$$49y^2 - 28y + 4 = 25y^2 - 60y + 36 - 4y - 8,$$

$$2y^2 + 3y - 2 = 0,$$

$$y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = -2.$$

y_2 nem megoldás, mert $(-1 \leq \sin x \leq 1)$.

Vagyis $\sin x = \frac{1}{2}$, azaz $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

$$A \setminus B = \left]-\frac{9\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right],$$

az intervallumba eső gyökök: $-\frac{11\pi}{6}$ és $-\frac{7\pi}{6}$.

$$A \cap B = \left[\frac{\pi}{6}; 2\pi\right],$$

az intervallumba eső gyökök: $\frac{\pi}{6}$ és $\frac{5\pi}{6}$.

9. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$x + \log_{21}(3^x + 1) = x \cdot \log_{21} 7 + \log_{21} 756.$$

(16 pont)

Megoldás. A logaritmus azonosságai alapján:

$$\log_{21} 21^x + \log_{21}(3^x + 1) = \log_{21} 7^x + \log_{21} 756,$$

$$\log_{21} 21^x(3^x + 1) = \log_{21}(7^x \cdot 756).$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt:

$$21^x(3^x + 1) = 7^x \cdot 756,$$

$$7^x 3^x(3^x + 1) = 7^x \cdot 756.$$

Mivel $7^x \neq 0$, ezért oszthatunk vele:

$$3^x(3^x + 1) = 756,$$

$$(3^x)^2 + 3^x - 756 = 0,$$

$$(3^x)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 756}}{2} = \frac{-1 \pm 55}{2}.$$

$$y_1 = 27, \quad y_2 = -28.$$

A -28 nem megoldás, mert $3^x > 0$. Vagyis $3^x = 3^3$, azaz: $x = 3$. Ez minden feltételnek megfelel, így valóban megoldása az egyenletnek.