I. rész

1. *Egy kerékpáros útjának első felét* 12 km/h, *a másik felét* 18 km/h *sebességgel tette meg. Visszafelé szeretne egyenletes sebességgel haladni és ugyanannyi idő alatt megtenni az utat, mint odafelé. Mekkora legyen a sebessége?* (*11 pont*)

Megoldás. Legyen az út hossza $2s$ km. Ekkor a kerékpáros az útjának első felét $\frac{s}{12}$ h, a másik felét pedig $\frac{s}{18}$ h alatt tette meg. Szeretné a visszautat, vagyis a $2s$ km utat $\frac{s}{12}+\frac{s}{18}$ h alatt megtenni. Ekkor a sebessége:

$$\frac{2s}{\frac{s}{12}+\frac{s}{18}}=\frac{2}{\frac{1}{12}+\frac{1}{18}}=14{,}4.$$

Vagyis 14,4 km/h legyen a kerékpáros sebessége visszafelé.

2. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert az egész számpárok halmazán:*

$$\left.\begin{aligned} x^2-4y^2-7x+14y=0,\\ xy+x+2y=0. \end{aligned}\right\}$$ (*13 pont*)

Megoldás. Az első egyenletet írhatjuk szorzatalakban: $(x-2y)(x+2y-7)=0$. Ebből következik, hogy $x=2y$ vagy $x=7-2y$.

Mindkét esetben a második egyenletbe helyettesítjük be az x-re kapott kifejezést.

Az első esetben: $2y^2+4y=0$.

Az ebből kapott y értékekhez kiszámítjuk az x-et is: $y_1=0$, $x_1=0$, $y_2=-2$, $x_2=-4$. A második esetben: $2y^2-7y-7=0$.

Ebből az egyenletből nem kapunk egész megoldásokat.

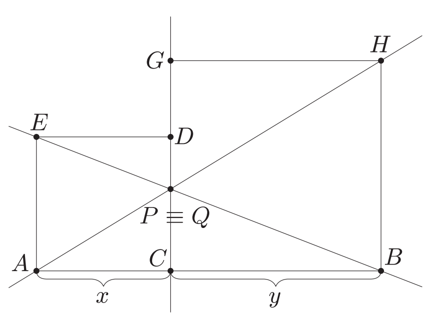
Az egyenletrendszer megoldásai: $y_1=0$, $x_1=0$ és $y_2=-2$, $x_2=-4$.

3. *Az AB szakaszon vegyünk fel egy C pontot, amelyre $AC=x$, $BC=y$. Az AB szakasz ugyanazon oldalára megrajzoljuk az $ACDE$ és a $CBHG$ négyzetet. A DC egyenest a BE egyenes a P pontban, az AH egyenes pedig a Q pontban metszi. Adjuk meg x és y ismeretében a CQ és a CP szakasz hosszát.* (*13 pont*)

Megoldás. A szöveg alapján elkészített *ábrán:* $PCB\triangle \cong EAB\triangle$. Felírhatjuk a megfelelő oldalak arányát:

$$\frac{PC}{CB}=\frac{EA}{AB},\quad \text{azaz}\quad \frac{PC}{y}=\frac{x}{x+y}.$$

Ebből kapjuk, hogy $PC=\frac{xy}{x+y}$.



Az előzőekhez hasonlóan: $QCA\triangle \cong HBA\triangle$. Felírhatjuk a megfelelő oldalak arányát: $\frac{QC}{CA}=\frac{HB}{BA}$, azaz $\frac{QC}{x}=\frac{y}{x+y}$.

Ebből kapjuk, hogy $QC=\frac{xy}{x+y}$.

Mindebből az is következik, hogy $P\equiv Q$.

4. *Hány darab* 1*-nél nagyobb, de* 2*-nél kisebb tagja van az*

$$a_n=-1+\lg(n+3)$$

sorozatnak? (*14 pont*)

Megoldás. A következő egyenlőtlenségrendszer pozitív egész megoldásainak a számát kell meghatároznunk: $1 < -1 + \lg(n+3) < 2$, azaz $2 < \lg(n+3) < 3$.

A 2 és a 3 logaritmus segítségével felírható: $\lg 100 < \lg(n+3) < \lg 1000$.

Az lg függvény növekedő, ezért: $100 < n+3 < 1000$, vagyis $97 < n < 997$.

A megfelelő n értékek: $98, 99, \ldots, 995, 996$, vagyis 899 db pozitív egész megoldása van az egyenlőtlenségrendszernek.

II. rész

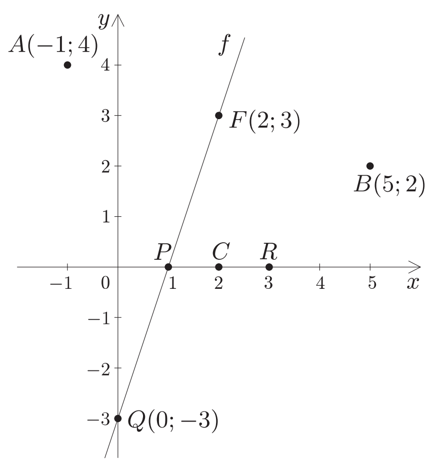
5. *Koordináta-rendszerben adott az $A(-1;4)$ és a $B(5;2)$ pont. Adjuk meg az x tengelyen azt*

a) a P pontot, amelyre $PA = PB$ és az y tengelyen azt a Q pontot, amelyre $QA = QB$; (*5 pont*)

b) az R pontot, amelyre $AR + RB$ minimális; (*5 pont*)

c) a C pontot, amelyre $AC^2 + CB^2$ minimális. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Az AB szakasz f felezőmerőlegesének minden pontjára teljesül, hogy az A-tól és a B-től vett távolsága egyenlő. Ezért ennek az egyenesnek és a tengelyeknek a közös pontját kell meghatároznunk.



Az AB szakasz felezőpontja: $F(2;3)$.

Az f egyenes egy normálvektora: $\mathbf{n}(3;-1)$.

Felírhatjuk az f egyenes egyenletét: $3x - y = 3$.

Ez az egyenes a $P(1;0)$ pontban metszi az x tengelyt, és a $Q(0;-3)$ pontban metszi az y tengelyt. Ezek a keresett pontok.

b) Az $A(-1;4)$ pont x tengelyre vett tükörképe $A'(-1;-4)$. Felírhatjuk az $A'B$ egyenes egyenletét: $x - y = 3$. Ez az egyenes a megfelelő pontban metszi az x tengelyt (ezt a tengelyes tükrözés tulajdonságainak felhasználásával beláthatjuk), vagyis $R(3;0)$.

c) Legyen a $C(c;0)$. Ekkor a $(c+1)^2 + 4^2 + (c-5)^2 + 2^2$ minimumhelyét keressük. A kifejezést az átalakítások után a $2c^2 - 8c + 46$, illetve a $2(c-2)^2 + 38$ alakra hozhatjuk, amely $c = 2$ esetén lesz minimális. A keresett pont: $C(2;0)$.

6. *a*) *Két szabályos dobókockával dobunk, a citromsárgával dobott érték legyen c, a narancssárgával dobott pedig legyen n. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a $cx^2 = n$ egyenletnek két egész gyöke lesz?* (*8 pont*)

b) *Három szabályos dobókockával dobunk, a pirossal dobott érték legyen p, a fehérrel dobott legyen f, a zölddel dobott pedig legyen z. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a $px^2 + fx + z = 0$ egyenletnek két különböző gyöke lesz és ezek egymás reciprokai?* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Az $\dfrac{n}{c}$ értékének négyzetszámnak kellene lennie. Mivel a dobott számok: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ezért a hányados megfelelő értékei: 1 és 4.

A kedvező eseteket a táblázatból kiolvashatjuk.

c	1	2	3	4	5	6	1
n	1	2	3	4	5	6	4

Az összes eset száma 36, a kedvező esetek száma pedig 7.

A keresett valószínűség: $\frac{7}{36}$.

b) Ha a két gyök egymás reciproka, akkor a szorzatuk 1, vagyis $\frac{z}{p} = 1$, azaz $p = z$. Ez a feladathoz szükséges feltétel. Azt is szeretnénk biztosítani, hogy legyen két különböző gyöke az egyenletnek, vagyis a diszkriminánsa legyen pozitív: $f^2 - 4pz > 0$.

Ha $p = z = 1$, akkor f lehetséges értékei: 3, 4, 5, 6. Ha $p = z = 2$, akkor f lehetséges értékei: 5, 6. A további $p = z$ esetekhez már nincs megfelelő f. Vagyis a jó számhármasok száma: 6.

Három különböző kockával dobva az összes eset száma: 6^3. A keresett valószínűség:

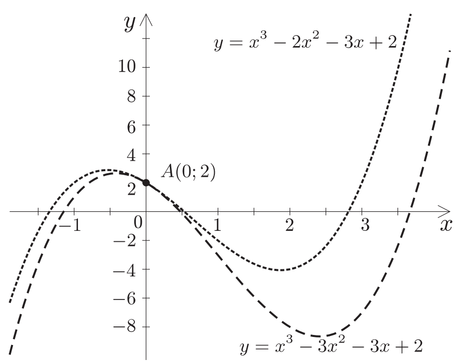
$$\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}.$$

7. *a) Mutassuk meg, hogy az $y = x^3 + (a-3)x^2 - 3x + 2$ görbesereg minden tagja egy ponton megy át. Adjuk meg ennek a fixpontnak a koordinátáit.* *(6 pont)*

b) Hogyan kell megválasztani az a paraméter értékét, hogy a hozzá tartozó görbe $x_0 = 3$ pontjában húzott érintője áthaladjon a $(0;2)$ ponton? *(10 pont)*

Megoldás. *a)* Két tetszőleges a értékhez tartozó görbe közös pontja megadja a fix pontot. Legyen $a = 0$, illetve $a = 1$.

Ha $a = 0$, akkor $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 2$. Ha $a = 1$, akkor $y = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$ (*1. ábra*).



1. ábra

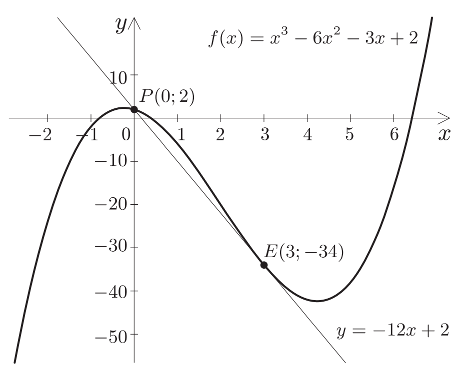
A két görbe közös pontja: $P(0;2)$ (A két egyenlet kivonásával kaptuk meg a közös pont koordinátáit). Ez valóban kielégíti a görbesereg minden tagjának egyenletét.

b) Felhasználjuk, hogy a keresett görbe $x_0 = 3$ pontjához tartozó érintőjének meredekségét a derivált helyettesítési értéke adja:

$$f'(x) = 3x^2 + 2(a-3)x - 3.$$

Ebből $f'(3) = 6a + 6 = m_e$. Az érintési pont második koordinátája $f(3) = 9a - 7$, ezért az érintési pont $E(3; 9a-7)$. Az érintő egyenlete az a paraméter függvényében $y - 9a + 7 = (6a+6) \cdot (x-3)$. Mivel az érintőnek át kell mennie a $P(0;2)$ ponton, azért $9 - 9a = -18a - 18$, amiből $a = -3$. A görbe egyenlete $y = x^3 - 6x^2 - 3x + 2$, az érintési pont $E(3;-34)$, és az érintő egyenlete

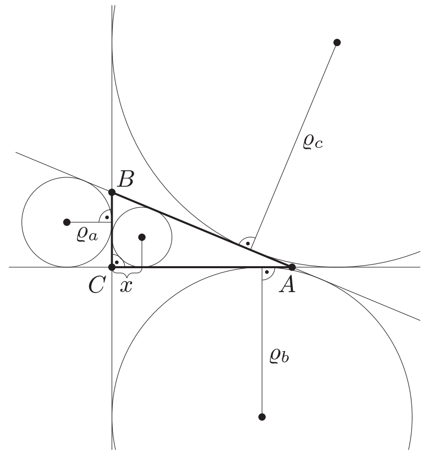
$y = -12x + 2$ (*2. ábra*).



2. ábra

8. *Egy derékszögű háromszög beírt körének sugara 2, a befogókhoz hozzáírt köreinek sugara 3 és 10. Mekkora az átfogóhoz hozzáírt kör sugara?* *(16 pont)*

Megoldás. Ha elkészítjük az *ábrát* (és a szokásos jelöléseket használjuk), akkor könnyen igazolható, hogy $\varrho_a = s-b$ és $\varrho_b = s-a$. A két összefüggés összeadásával kapjuk, hogy $\varrho_a + \varrho_b = c$. A megadott adatok szerint: $c = 13$.



Derékszögű háromszög esetén $\varrho_c = s$.

Ha a háromszög beírt körének a BC oldallal vett érintési pontja és a B csúcs közti távolság x, akkor: $(x+2)^2 + (15-x)^2 = 169$, amiből $x^2 - 13x + 30 = 0$, $x_1 = 10$, $x_2 = 3$. Innen $a = 5$, $b = 12$.

A derékszögű háromszög mindhárom oldalát ismerve az átfogóhoz hozzáírt kör sugarát kiszámolhatjuk: $\varrho_c = s = \dfrac{5+12+13}{2} = 15$.

Megjegyzés. Általában is megmutathatjuk, hogy derékszögű háromszög esetén: $\varrho_a + \varrho_b + \varrho = \varrho_c$.

9. *Az origó középpontú 13 sugarú körvonalra illeszkedő 12 darab rácspont (olyan pont, amelyek mindkét koordinátája egész szám) meghatároz egy tizenkétszöget.*

a) Az így kapott síkidom érintőtizenkétszög? *(5 pont)*

b) Számítsuk ki a tizenkétszög területét. *(7 pont)*

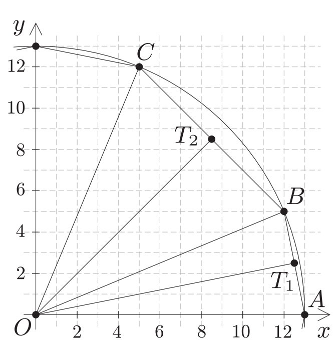
c) Legyen egy 13 magasságú egyenes gúla alaplapja ez a tizenkétszög. Mekkora szöget zárnak be az oldallapok az alaplappal? *(4 pont)*

Megoldás. *a)* A tizenkétszög három szomszédos csúcsa: $A(13;0)$, $B(12;5)$, $C(5;12)$.

Ha érintőtizenkétszög lenne, akkor lenne beírt köre. Egy origó középpontú körnek érintenie kellene az $AB = \sqrt{26}$ és a $BC = 7\sqrt{2}$ hosszúságú oldalakat is.

Az OAB egyenlő szárú háromszögben az O-ból húzható OT_1 magasság hosszát Pitagorasz-tétellel kiszámíthatjuk (*1. ábra*):

$$OT_1 = \sqrt{13^2 - \left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^2} = 5 \cdot \sqrt{\frac{13}{2}}.$$



1. ábra

Az OBC egyenlő szárú háromszögben az O-ból húzható OT_2 magasság hosszát is a Pitagorasz-tétellel számíthatjuk ki:

$$OT_2 = \sqrt{13^2 - \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{17\sqrt{2}}{2}.$$

Mivel $OT_1 \neq OT_2$, így nincs beírt köre a tizenkétszögnek, vagyis nem érintőtizenkétszög.

b) A feladatban szereplő tizenkétszög 8 db OAB háromszöggel egybevágó, és 4 db OBC háromszöggel egybevágó háromszögből rakható össze. Ezen egyenlő szárú háromszögek alapjainak és az alapokhoz tartozó magasságoknak ismeretében kiszámítjuk a területüket:

$$t_{OAB} = \frac{\sqrt{26} \cdot 5 \cdot \sqrt{\frac{13}{2}}}{2} = \frac{65}{2}, \qquad t_{OBC} = \frac{7\sqrt{2} \cdot \frac{17\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{119}{2}.$$

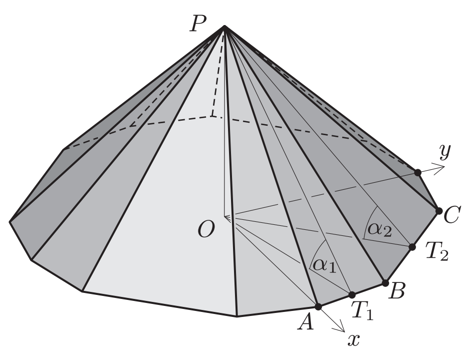
Az előzőek alapján a tizenkétszög területe:

$$T = 8 \cdot t_{OAB} + 4 \cdot t_{OBC} = 8 \cdot \frac{65}{2} + 4 \cdot \frac{119}{2} = 498.$$

c) A kúp csúcsa legyen P. Az eddigi jelöléseket is használva a POT_1 és a POT_2 derékszögű háromszögekből kapjuk a keresett szögek tangensét. (Csak kétféle dőlésű oldallap van, *2. ábra*.)

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{PO}{OT_1} = \frac{13}{5 \cdot \sqrt{\frac{13}{2}}} \approx 1{,}0198, \qquad \text{amiből} \qquad \alpha_1 \approx 45{,}56^\circ.$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{PO}{OT_2} = \frac{13}{\frac{17\sqrt{2}}{2}} \approx 1{,}0815, \qquad \text{amiből} \qquad \alpha_2 \approx 47{,}24^\circ.$$



2. ábra