

I. rész

1. Tóni bácsi a péceli sportpályán pogácsát és perezet árult. A pogácsán 25%, a perezen 60% haszna volt. Egy alkalommal ugyanannyi pogácsát adott el, mint perezet, így 50% haszonra tett szert. Másnap viszont kétszer annyi pogácsát adott el, mint perezet.

a) Hány százalék volt ekkor a haszna? (8 pont)

b) Később Tóni bácsi kínálatát bővítette gumicukorral és muffinnal. Endre a szurkoláshoz három terméket vásárol. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha egyféle termékből többet is vehet? (4 pont)

Megoldás. a) Ha a pogácsákért g Ft-ot kapott, akkor ebből $0,25g$ Ft a haszna. A perezekért kapott r Ft-ból pedig $0,6r$ Ft a haszna. A szöveg alapján tudjuk, hogy $0,25g + 0,6r = 0,5(g + r)$, azaz

$$r = 2,5g.$$

Másnap: $0,25 \cdot 2g + 0,6r = x(2g + r)$, vagyis $0,5g + 1,5g = x(2g + 2,5g)$, amiből

$$x = \frac{2}{4,5} \approx 0,4444.$$

Tóni bácsi haszna kb. 44,44% volt ezen a napon.

b) Ismétléses kombinációról van szó, ezért az esetek száma: $\binom{7-1}{3} = 20$.

2. Az U2CK3 bolygón egy hónap 41 napból áll. A helyiek szerint az összes nap alkalmas a három nemes tevékenység (repülés, tanulás, főzés) közül legalább az egyikre. Mindhárom nemes tevékenységre a hónapban csak három nap alkalmas. A repülésre alkalmas napok száma 19, a tanulásra alkalmas napok száma 23, a főzésre alkalmas napok száma 19.

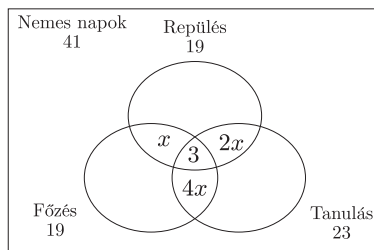
a) A hónap azon napjainak száma, amelyek csak repülésre és főzésre, amelyek csak repülésre és tanulásra, illetve amelyek csak tanulásra és főzésre alkalmasak, egy 2 hányadosú mértani sorozat három egymást követő elemei. Hány olyan nap van a hónapban, amely csak egy nemes tevékenységre alkalmas? (6 pont)

b) Ha a 41 nap közül véletlenszerűen kiválasztunk hármat, akkor mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom nap csak főzésre alkalmas? (6 pont)

Megoldás. a) Készítsünk ábrát a szöveg alapján. A következő egyenletet írhatjuk fel:

$$41 = 19 + 23 + 19 - 7x - 2 \cdot 3,$$

amiből $x = 2$.



Mivel $41 - 2 - 4 - 8 - 3 = 24$, így 24 nap alkalmas pontosan egy nemes tevékenységre.

b) A csak főzésre alkalmas napok száma:

$$19 - 2 - 8 - 3 = 6.$$

Kedvező esetek száma: $\binom{6}{3} = 20$, összes eset száma: $\binom{41}{3} = 10\,660$.

A keresett valószínűség: $p = \frac{20}{10\,660} \approx 0,001\,876$.

3. a) Végezzük el a következő integrálást:

$$\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx. \quad (8 \text{ pont})$$

b) Határozzuk meg

$$f(x) = (x^2 + 3)(x^3 + 2x - 1)$$

differentiálhányados függvényét.

(5 pont)

Megoldás. a) Tudjuk, hogy $\cos^2 x \cdot \sin^2 x \neq 0$, azaz $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \\ &= (\operatorname{tg} x + C_1) + (-\operatorname{ctg} x + C_2) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C, \end{aligned}$$

ahol $C_1, C_2, C \in \mathbb{R}$.

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^5 + 2x^3 - x^2 + 3x^3 + 6x - 3)' = (x^5 + 5x^3 - x^2 + 6x - 3)' = \\ &= 5x^4 + 15x^2 - 2x + 6. \end{aligned}$$

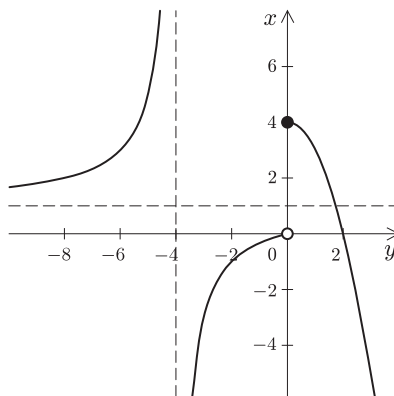
4. a) Ábrázoljuk a következő hozzárendeléssel megadott függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & \text{ha } x \geq 0, \\ \frac{x^2 - 5x}{x^2 - x - 20}, & \text{ha } x < 0 \text{ és } x \neq 4. \end{cases} \quad (8 \text{ pont})$$

b) Legyen k egy valós szám. Hány zérushelye van a $g(x) = f(x) - k$ függvénynek?

(6 pont)

Megoldás. a) Az értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.



Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - x - 20} &= \frac{x(x - 5)}{(x - 5)(x + 4)} = \\ &= \frac{x + 4 - 4}{x + 4} = \frac{x + 4}{x + 4} - \frac{4}{x + 4} = \\ &= -4 \cdot \frac{1}{x + 4} + 1. \end{aligned}$$

Most már megrajzolható a függvény grafikonja.

b) Az $f(x) = k$ egyenlet megoldásainak száma adja a $g(x)$ zérushelyeinek számát.

Ha $k > 4$, akkor egy zérushely van.

Ha $1 < k \leq 4$, akkor két zérushely van.

Ha $0 \leq k \leq 1$, akkor egy zérushely van.

Ha $k < 0$, akkor két zérushely van.

II. rész

5. Egy építőmérnök feladata egy szökőkút tervezése és építtetése. A telket nyugatról egy fal, délről egy sövény határolja, a fal és a sövény egymásra merőlegesen helyezkednek el. A telken áll egy szilvafa a faltól és a sövénytől egyaránt 7 m-re, egy cseresznyefa a faltól 5, a sövénytől 3 m-re, és egy szobor a faltól 18 és a sövénytől 9 m-re. A szökőkutat úgy kell elhelyeznie, hogy a fáktól egyenlő távolságra legyen, és a szökőkút kétszer olyan messze legyen a szobortól, mint a cseresznyefától.

a) Milyen messze épül a szökőkút a szobortól? (11 pont)

b) A szökőkút építéséhez tartozó földmunka elvégzésével Ede 10, Béla 12 óra alatt végezne. Béla reggel 7 órakor hozzáfog a munkához, egy óra múlva csatlakozik hozzá Ede, egy alkalommal fél óra szünetet tartanak, majd együtt dolgoznak a munka befejezéséig. Hány órakor végeznek? (5 pont)

Megoldás. a) A fal vonala legyen a koordinátarendszerben az y tengely, a sövény vonala pedig az x tengely.

A szökőkút koordinátái: $K(x; y)$, a szilvafáé: $S(7; 7)$, a cseresznyefáé: $C(5; 3)$, a szoboré: $B(18; 9)$. A szökőkút távolsága a cseresznyefától legyen t , azaz

$$(1) \quad (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = t^2.$$

Mivel a szökőkút távolsága a két fától egyenlő, ezért a kút a CS szakasz felezőmerőlegesén kell, hogy legyen.

A felezőpont koordinátái: $F(6; 5)$, az $\overrightarrow{FS}(1; 2)$ vektor pedig a keresett egyenes normálvektora lesz. Ezek alapján a felezőmerőleges egyenlete:

$$(2) \quad x + 2y = 16.$$

Mivel a szökőkút távolsága a szobortól kétszer akkora, mint a cseresznyefától, ezért

$$(3) \quad (x - 18)^2 + (y - 9)^2 = (2t)^2.$$

Az (1), (2) és (3) egyenletekből álló egyenletrendszerből kaphatjuk a $3y^2 - 38y + 87 = 0$ egyenletet. Az egyenletrendszer megoldásai:

$$x_1 = -\frac{10}{3}, \quad y_1 = \frac{29}{3},$$

ekkor a szökőkút a telken kívülre esik.

$$x_2 = 10, \quad y_2 = 3, \quad t_2 = 5.$$

Vagyis a szökőkút a szobortól 10 m távolságra épülhet.

b) Jelöljük x -szel a közös munkaidőt. Felírható a következő egyenlet:

$$\frac{1}{12} + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{10} \right) \cdot x = 1, \quad \text{amiből } x = 5.$$

Vagyis a munka megkezdése után eltelik 1 óra, amíg Béla egyedül dolgozik, majd 5,5 óra telik el a munka befejezéséig, melyben benne van a félórás pihenő is.

Azaz 13 óra 30 perckor végeznek a munkával.

6. Egy számtani sorozatban az első és a negyedik tag reciprokanak összege 5,5. A sorozat első, második és hatodik tagja egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Adjuk meg a számtani sorozat első tagját és a differenciáját. (16 pont)

Megoldás. Mivel a számtani sorozat első, második és hatodik tagja egy mértani sorozat három egymást követő tagja, ezért $a(a + 5d) = (a + d)^2$. A szöveg alapján a következő egyenletet is felírhatjuk:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a + 3d} = 5,5.$$

A két egyenlet rendezésével kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} d(3a - d) &= 0, \\ 5,5a^2 + 16,5ad - 3d - 2a &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Az első egyenletből kapjuk, hogy $d = 0$ vagy $d = 3a$

I. eset: Ha $d = 0$, akkor $5,5a^2 - 2a = 0$, azaz $a(5,5a - 2) = 0$. Vagyis: $a = 0$ vagy $a = \frac{4}{11}$. Az $a = 0$ nem lehet. Az $a = \frac{4}{11}$, $d = 0$ megoldása a feladatnak.

II. eset: Ha $d = 3a$, akkor $5a^2 - a = 0$, azaz $a(5a - 1) = 0$. Vagyis: $a = 0$ vagy $a = \frac{1}{5}$. Az $a = 0$ nem lehet. Az $a = \frac{1}{5}$, $d = \frac{3}{5}$ megoldása a feladatnak.

7. Két dobókockát feldobunk. Legyen X a két dobott szám különbségének abszolútértéke.

- a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy X négyzetszám? (6 pont)
 b) Ábrázoljuk az X valószínűségi változó eloszlását. (5 pont)
 c) Határozzuk meg X várható értékét. (5 pont)

Megoldás. a) A táblázatban látjuk a lehetséges eseteket. Kedvező esetek száma: 20. Összes eset száma: 36.

	1	2	3	4	5	6
1	<u>0</u>	<u>1</u>	2	3	<u>4</u>	5
2	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	2	3	<u>4</u>
3	2	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	2	3
4	3	2	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	2
5	<u>4</u>	3	2	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>1</u>
6	5	<u>4</u>	3	2	<u>1</u>	<u>0</u>

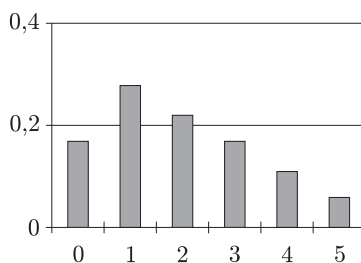
A keresett valószínűség:

$$p = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

b)

X	0	1	2	3	4	5
gyakoriság	6	10	8	6	4	2
$p(X)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

Az X valószínűségi változó eloszlását a táblázat értékei alapján ábrázolhatjuk:



c) Az X várható értéke:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{8}{36} + 3 \cdot \frac{6}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 5 \cdot \frac{2}{36} = \frac{70}{36} = \frac{35}{18}.$$

8. Az ABC háromszög oldalainak hossza: $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm.

- a) Határozzuk meg a háromszög A csúcsából induló s_a súlyvonalának és a c oldalhoz tartozó f_c szögfelezőjének hosszát. (8 pont)
 b) Határozzuk meg a háromszög beírt és köré írt körének sugarát. (8 pont)

Megoldás. a) Az ABC háromszögben a koszinusztétel:

$$15^2 = 13^2 + 14^2 - 2 \cdot 13 \cdot 14 \cdot \cos \gamma.$$

Innen kapjuk, hogy

$$\cos \gamma = \frac{5}{13}, \quad \text{azaz} \quad \gamma \approx 67,38^\circ.$$

Legyen a BC oldal felezőpontja F . Alkalmazzuk a koszinusztételt az AFC háromszögre:

$$s_a^2 = 6,5^2 + 14^2 - 2 \cdot 6,5 \cdot 14 \cdot \frac{5}{13} = 168,25.$$

Vagyis $s_a = \sqrt{168,25} \approx 12,97$.

A C -ből induló szögfelező a szemközti oldalt a D pontban metszi. A szögfelező a szemköztes oldalt a közrefogó oldalak arányában osztja, ebből kiszámítjuk a BD szakasz hosszát:

$$\frac{BD}{15 - BD} = \frac{13}{14}, \quad \text{azaz} \quad BD = \frac{65}{9}.$$

A B csúcsnál lévő szög koszinuszát kiszámítjuk koszinusztétellel: $\cos \beta = \frac{33}{65}$.

A BCD háromszögben alkalmazzuk a koszinusztételt:

$$f_c^2 = 13^2 + \left(\frac{65}{9}\right)^2 - 2 \cdot 13 \cdot \frac{65}{9} \cdot \frac{33}{65} = \frac{10192}{81},$$

ahonnan $f_c \approx 11,22$.

A háromszög s_a súlyvonala kb. 12,97 cm, az f_c szögfelezője kb. 11,22 cm.

b) Kiszámítjuk a háromszög területét (pl. Heron-képlettel):

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84.$$

A beírt kör sugara: $\varrho = \frac{t}{s} = \frac{84}{21} = 4$. A köré írt kör sugara:

$$r = \frac{abc}{4t} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8} = 8,125.$$

A beírt kör sugara 4 cm, a köré írt sugara 8,125 cm.

9. Egy húrtrapéz alapú egyenes hasáb alakú edényben víz van. A trapéz párhuzamos oldalai 4 cm és 10 cm, szárjai 5 cm, a test magassága 11,2 cm hosszú. Ha a testet a trapéz alakú alaplapjáról a legnagyobb területű oldallapjára fordítjuk, akkor az edényben levő víz magassága a harmadára változik. Határozzuk meg az edényben levő víz térfogatát. (16 pont)

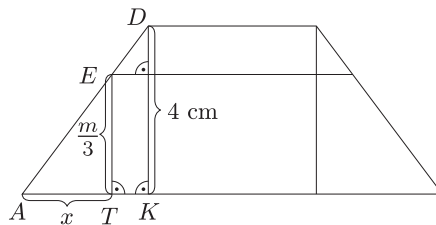
Megoldás. Az adatok alapján: $AK = 3$, a trapéz magassága: $DK = 4$. Ha a test a trapéz alakú alaplapján áll, akkor a benne lévő víz térfogata:

$$V = \frac{10+4}{2} \cdot 4 \cdot m = 28m,$$

ahol m a víz magassága.

A test legnagyobb területű oldallapja a 10-szer 11,2-es téglalap. A $KDA\Delta \sim TEA\Delta$, ezért

$$\frac{x}{3} = \frac{\frac{m}{3}}{4}, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{m}{4}.$$



Ha a test a 10-szer 11,2-es téglalap alakú oldallapján áll, akkor a benne lévő víz térfogata így írható fel:

$$V = \frac{10+10-2 \cdot \frac{m}{4}}{2} \cdot \frac{m}{3} \cdot 11,2, \quad \text{vagyis} \quad \frac{10+10-2 \cdot \frac{m}{4}}{2} \cdot \frac{m}{3} \cdot 11,2 = 28m.$$

Ebből kapjuk, hogy $11,2m^2 - 112m = 0$, amiből $m = 0$ vagy $m = 10$.

Az $m = 0$ esetén az edényben nincs víz.

Az $m = 10$ esetén 280 cm^3 víz van az edényben.