

Furfangos feladványok, logikai fejtörők megalkotásához meglepően kevés matematikai előismeret is elégséges. Ennek a gondolatnak a szellemében fogtam neki egy saját ötletből született, egyszemélyes játék vizsgálatának. Azonban a kezdetben pár percesnek ígérkező probléma egyre szövevényesebb utakra indított, az elágazások gyakran nem várt eredményekkel szolgáltak.

A klasszikus probléma néhány változatával együtt a KöMaL 2008. decemberi számában került ismertetésre, ám a közölt cikkben felvetett kérdések maradéktalan megválaszolását (részben terjedelmi okok miatt) mellőztem. Az elvarratlan szálak közül a következő feladatot kiemelve szeretném felvenni a „történet fonalát”:

Feladat. Az előttünk álló asztalon k db ($k \geq 2$), egytől k -ig sorszámozott, kezdetben üres doboz található. A dobozok közül néhányban (akár valamennyi dobozban) összesen k db, teljesen azonos golyót helyezhetünk el, tetszőleges módon.

Ellenfelünk a játékban egy varázsló, pálcájának egyetlen suhintására az összes, nem üres dobozban lévő golyó egyszerre kiemelkedik a dobozából, és az eredetileg s sorszámu, g golyót tartalmazó doboz összes golyója a g sorszámu dobozba lebeg át (az $s = g$ speciális esetben tehát a golyók nem váltanak dobozt; az ilyen tulajdonságú dobozokat a továbbiakban „rendesnek” nevezzük).

A golyók vándorlásának végeztével a varázsló megtekinti a dobozokat; amennyiben suhintását követően a dobozok mindegyike üressé vagy rendessé vált, befejezi a játékot. Ellenkező esetben pálcájával ismételten suhint, elvégezve az előbb ismertetett varázslatot. Mindezt ismétli mindaddig, míg ténykedése következményeként az asztalon lévő dobozok mindegyike üressé vagy rendessé nem válik. Megfelelő golyóelrendezés megválasztásával legfeljebb hány lépés (suhintás) elvégzésére kötelezhetjük a varázslót?

A korábban közölt eredményekre támaszkodva rendelkezésünkre áll k ($\neq 2^\alpha$) golyónak olyan elhelyezése, mely a varázslót $\lceil \log_2 k \rceil$ lépésre kényszeríti, nevezetesen: $k = 2^m + r$ ($0 \leq r < 2^m$) esetén a

2^i ($i = 0, 1, \dots, m-2$) és a $2^{m-1} + r$ sorszámu dobozokba a sorszámmal megegyező számú golyót helyezve, a közölt eljárás m lépéses.

Ezzel együtt, szintén korábban közölt megfontolásaink eredményeként igazolást nyert, hogy a lépésszám maximuma k golyó esetén az imént közölnél legfeljebb eggyel lehet több (kettőhatvány k esetén ez utóbbi becslés éles, ezért a továbbiakban vizsgálódásunk tárgyát a nem kettőhatvány értékek képezik). Jelen cikkben a lépésszám maximumának pontos értékét próbáljuk meghatározni k függvényében, az általánosság megszorítása nélkül.

Egy ötlet...

Imént ismertetett megoldásunk azt a gyanút keltheti az olvasóban, hogy a konstrukció készítésénél talán nem voltunk eléggé „merészek”. A fent bemutatott elrendezés készítésével analóg módon ugyanis megpróbálhatnánk visszavezetni esetünket az előbbi, 2^{m-1} golyót tartalmazó példa helyett akár 2^m golyót tartalmazó elrendezésre is; ekkor, ha a játék az utóbb említettel azonos módon menne végbe, az eljárás lépésszáma eggyel növekedne, ezzel elérnénk a kívánt értéket.

Az előbb ismertetett konstrukciót másolva tehát ötletünk $k = 2^m + r$, ($0 < r < 2^m$) golyó elhelyezésére a következő: $i = 0, 1, \dots, m-1$ esetén helyezzünk a 2^i sorszámu dobozba 2^i db golyót. A 2^m sorszámu dobozba „láncindítónak” egyetlen golyót tegyünk (nyilvánvaló, hogy a megadott sorszámu doboz helyett tulajdonképpen tetszőleges, korábban nem használt doboz felhasználható lenne erre a célra, egyetlen kivételével, amelyben a megmaradt golyókat szeretnénk tárolni), a megmaradt r golyót pedig helyezzük az r sorszámu dobozba. Elkészített elrendezésünktől tehát azt várjuk, hogy a végállapot eléréséhez

$m+1$ lépést kelljen megtenni.

Analógiánk egyetlen sebezhető pontja a megmaradó golyók elhelyezése. Elképzelésünk szerint az ismertetett megoldásokban ezek a golyók a számukkal megegyező sorszámu dobozt rendessé alakítják, és a játék folyamán onnan nem mozdulnak. Ennek azonban szükséges (és elégséges) feltétele mindkét konstrukcióban, hogy a maradék elhelyezésénél a $2^{m-1} + r$, illetve jelen esetben az r sorszámu dobozok még üresek legyenek, azaz, a fentiekben golyókkal megtöltött $m+1$, illetve $m+2$ doboz páronként különböző legyen. Míg az első esetben ez a feltétel nyilvánvalóan teljesül (a golyók számának több mint a felét maradékként használtuk fel), „megerősített” konstrukciónkban ez a feltétel megsérül, amennyiben r értéke 2-hatvány; ilyen esetekben tehát az „óvatos” konstrukció ötletét nem tudjuk szóról szóra átültetni.

Habár az előbbieket értelmében nem sikerült általános k esetén elérni a kívánt $\lceil \log_2 k \rceil + 1$ -es lépésszámot, konstrukciónkkal jelentős részeredményt értünk el:

Eredmény: Ha $k = 2^m + r$, ahol $1 \leq r \leq 2^m - 1$ és $r \neq 2^\alpha$ tetszőleges $0 \leq \alpha \leq m-1$ esetén, a lépésszám lehetséges maximuma $\lceil \log_2 k \rceil + 1 = m + 1$.

Feltáratlan eseteinkben tehát k két különböző 2-hatvány összegeként áll elő, azaz feltételezhető, hogy $k = 2^m + 2^\alpha$ ($0 \leq \alpha \leq m-1$). Az előbbieken ismertetett konstrukciónkat jelen összefüggés miatt nem tudjuk felhasználni, ám az ott bemutatott elrendezést minimális változtatással a hátrahagyott esetek „döntő többségéhez” hozzá tudjuk idomítani. Változtatásunk lényege mindössze az az alapvető ötlet, hogy a korábban problémát jelentő „maradék” golyókat egynél több dobozban próbáljuk eltárolni, alkalmas dobozválasztással.

Mindehhez tételezzük fel a fent ismertetett, k értékére vonatkozó összefüggéseink mellett, hogy $\alpha \geq 3$ (azaz, $2^m > 2^\alpha \geq 8$, így $k \geq 24$). Ebben az esetben (és csak ebben az esetben) 2^α felbontható két pozitív egész szám összegére, amelyek egyike sem 2-hatvány. Megoldásunkban ezt az alábbi módon használhatjuk ki: helyezzünk el 2^m golyót korábbi konstrukciónkhoz hasonlóan, valamint a $2^{\alpha-1} - 1$ és $2^{\alpha-1} + 1$ sorszámú dobozokba a sorszámukkal egyező számú golyót tegyünk. Mivel $\alpha - 1 \geq 2$, azért $2^{\alpha-1} - 1$ és $2^{\alpha-1} + 1$ egynél nagyobb páratlan számok, tehát nem lehetnek 2-hatványok. Ekkor az

$\alpha \geq 3$ feltételt felhasználva, a „maradék” golyókat két, nem 2-hatvány sorszámú dobozba raktuk szét, melyek így az eljárás valamennyi lépése után „rendesek” maradnak; könnyen ellenőrizhető, hogy a játékos ez esetben elvárásainknak megfelelően $m + 1$ lépést megtéve jut el a végállapotba, így becslésünkre jelen esetben is sikerült élességet igazoló konstrukciót adnunk. Ellenben, ha α értéke 3-nál kisebb, ismertetett módszerünkkel nem érhetünk célba, hiszen nyilvánvaló, hogy 2^α -t tetszőlegesen bontva fel pozitív egészek összegére, a tagok között legalább egy 2-hatvány található, ami elrontja a fent ismertetett elrendezést; jelen megoldásunk tehát erősen támaszkodik az $\alpha \geq 3$ feltételre.

Megvizsgált k értékeink esetén általánosan sikerült igazolnunk, hogy megfelelő konstrukció készítésével a varázsló $\lceil \log_2 k \rceil + 1$ lépést tesz meg a játék befejezéséig, és az elért eredmények tükrében azt sejtjük, hogy ez a még feltáratlan k értékek esetén sem lesz másképpen. Tovább erősíti elképzelésünket annak illúziója, hogy tulajdonképpen „már a célegyenesben” vagyunk; talpon maradt eseteink – habár végtelen sok van belőlük – rendkívül speciálisak, az α értékétől függően három osztályba sorolhatóak:

- (i) $k = 2^m + 1, \quad 1 \leq m;$
- (ii) $k = 2^m + 2, \quad 2 \leq m;$
- (iii) $k = 2^m + 4, \quad 3 \leq m.$

Sejtésünk igazolásához lássunk neki felsorolt osztályaink vizsgálatának. Elsőként ellenőrizzük állításunk igazát az osztályok legkisebb képviselőire.

6. feladat. *Készítsünk megfelelő lépésszámú konstrukciókat $k = 3, 6, 12$ esetekben a lépésszám-korlát élességének igazolására.*

Feladatunk tehát fenti esetekben olyan elrendezések megadása, amelyeket kezdőállapotnak választva a játék lépésszáma rendre 2, 3, illetve 4. Az alábbiakban ezek mindegyikére egy-egy lehetséges konstrukciót mutatunk (felsorolva a sorszám szerint növekvő sorba rendezett dobozokban lévő golyók számát):

- (i) 1, 1, 1;
- (ii) 0, 0, 3, 1, 1, 1;
- (iii) 0, 0, 3, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 1, 1, 1.

Ezzel állításunkat az osztályok legkisebb képviselőire igazoltuk.

Szemléletünk a korábbiakhoz hasonlóan azt sugallja, hogy k értékeinek a fenti osztályozása olyan csoportokba sorolta a megmaradt k -kat, mely csoportokon belül a lépésszám k függvényeként, egységesen megadható; ennek értelmében az osztályok vizsgált elemei tanúként szolgálnak a keresett $\lceil \log_2 k \rceil + 1$ lépésszám elérhetőségére. A tényleges bizonyításhoz természetesen szükséges lenne az osztályozás említett tulajdonságának igazolása, vagy ezt megkerülendő, a korábban említett teljes indukciós gondolatmenet ellenőrzése. Jelen cikkben azonban szeretnénk megkímélni az olvasót felsorolt bizonyítási ötleteink elemzésétől és a megoldási kísérletek során fellépő nehézségek bemutatásától. Ennek legfőbb oka, hogy a keresett bizonyítások egyszerűen nem léteznek.

„Fekete bárányok”

Az alábbiakban látni fogjuk, hogy eddigi elképzeléseinkkel és elvárásainkkal ellentétben, hátrahagyott eseteink valóban rendhagyóak; amennyiben fent megadott osztályaink bármelyikének nem legkisebb elemét választjuk k értékének, nem létezik olyan elrendezés, amelyet kezdőállapotnak választva a varázsló $\lceil \log_2 k \rceil + 1$ lépést kényszerül megtenni a játék befejezéséig.

1. állítás. *Ha $k = 2^m + 2^\alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 2$) és $k \neq 3, 6, 12$, akkor a lépések számának maximuma $\lceil \log_2 k \rceil$.*

Bizonyításunkat néhány lemma igazolásával kezdjük.

3. lemma. *Ha k golyó és doboz esetén adott elrendezésnél az eljárás lépésszáma n , akkor megadhatóak olyan $d_0, d_1, \dots, d_n$ dobozok, amelyekre az eljárás i -edik lépésében a d_{i-1} doboz golyói a d_i dobozba vándorolnak ($1 \leq i \leq n$).*

Bizonyítás. Nevezzük a bizonyításban a d doboz s -edik lépésre vonatkozó ősképeinek azokat a dobozokat (ha vannak), amelyekből az s -edik lépésben d -be golyók érkeztek. Tekintsük az eljárás végállapotát; itt található olyan doboz, amelybe az n -edik lépésben golyó érkezett (ellenkező esetben az eljárás legalább 1 lépéssel rövidebb lenne), legyen ez d_n . Ekkor tehát d_n -nek az n -edik lépésre vonatkozó ősképe legalább egy elemű, legyen ennek egyik eleme d_{n-1} . Vizsgáljuk meg ekkor d_{n-1} -nek az $(n - 1)$ -edik lépésre vonatkozó ősképet. Ez az őskép szintén legalább egy

elemű, ellenkező esetben nem érkezett golyó d_{n-1} -be az $(n-1)$ -edik lépésben, aminek következményeként az üressé vagy „rendessé” vált, így d_n -be nem adhatott golyót. Legyen ekkor a vizsgált ősképp egy eleme d_{n-2} ; gondolatmenetünket az imént ismertetett módon iterálva definiálhatunk egy lemmánk feltételének megfelelő d_i sorozatot.

3. megjegyzés. Közölt bizonyításunk önmagában nem zárja ki annak lehetőségét, hogy tetszőleges $d_0, d_1, \dots, d_n$ sorozatban szereplő (nem szomszédos) dobozok azonosak legyenek, azaz, a lépések során valamely dobozba „visszatérjünk”. Erre vonatkozóan a következő lemmából nyerhetünk érdemi eredményt.

4. lemma. Tetszőleges $d_0, d_1, \dots, d_n$ sorozatra jelöljük a d_i dobozban az i -edik lépés után lévő golyók számát $\|d_i\|$ -vel. Ekkor $i = 1, \dots, n-1$ esetén $\|d_i\| \geq 2 \cdot \|d_{i-1}\|$.

Bizonyítás. Mivel d_i dobozok d_n kivételével az i -edik lépés után nem „rendesek” (ez esetben ugyanis az $(i+1)$ -edik lépésben nem érkezhetne golyó d_i -ből d_{i+1} -be), és az i -edik lépésben a d_i dobozba legalább egy dobozból, dobozonként $\|d_{i-1}\|$ golyó érkezik, így – az első lemmával összevetve – a lépést követően valóban $\|d_i\| \geq 2 \cdot \|d_{i-1}\|$.

4. megjegyzés. A fentiekben elmondottakat kiegészítve új bizonyítást kapunk korábbi lépésszám-bebecslésünkre: tetszőleges $d_0, d_1, \dots, d_n$ sorozatot véve, $\|d_0\| \geq 1$, így $k \geq \|d_{n-1}\| \geq 2^{n-1}$, tehát $n \leq \lceil \log_2 k \rceil + 1$.

Bizonyítandó állításunk tehát a következő: $k = 2^m + 1$ ($m \geq 2$), $k = 2^m + 2$ ($m \geq 3$) és $k = 2^m + 4$ ($m \geq 4$) esetekben nem érhető el $m+1$ lépésszámú eljárás.

Indirekt módon tegyük fel, hogy fenti k értékek valamelyikéhez készíthető elrendezés a kívánt lépésszámmal. Az alábbiakban belátjuk, hogy mindez csak erős megszorításokkal lenne lehetséges.

5. lemma. Ha létezik a fent feltételezett konstrukció, annak tetszőleges $d_0, d_1, \dots, d_{m+1}$ sorozatát vizsgálva, $i = 1, \dots, m$ esetén $\|d_i\| = 2 \cdot \|d_{i-1}\|$.

Bizonyítás. Első lemmánk és a d_i sorozat szerkezetének ismeretében nyilvánvaló, hogy $i = 1, \dots, m$ esetén $\|d_{i-1}\|$ valódi osztója $\|d_i\|$ -nek. Vegyük észre továbbá, hogy d_{m+1} „rendes”, hiszen a végállapotban nem üres. Ekkor – összevetve az első lemmával – az $(m+1)$ -edik lépés után kizárólag a d_m dobozból érkezett golyókat tartalmazza, tehát $\|d_m\| = \|d_{m+1}\|$. Amennyiben ötödik lemmánkban ismertetett megkötésünk nem teljesül valamely sorozatban legalább egy $0 \leq i \leq m$ esetén, akkor i ezen értékeire $\|d_i\| \geq 3 \cdot \|d_{i-1}\|$; $\|d_0\| \geq 1$ miatt ekkor:

$$k \geq \|d_{m+1}\| = \|d_m\| \geq 3 \cdot 2^{m-1} = 2^m + 2^{m-1}.$$

Azaz:

$$2^\alpha \geq 2^{m-1}.$$

Tehát vizsgált eseteinkben:

- (i) $2^1 \leq 2^{m-1} \leq 1$;
- (ii) $2^2 \leq 2^{m-1} \leq 2$;
- (iii) $2^3 \leq 2^{m-1} \leq 4$.

Ezek értelemszerűen ellentmondásra vezetnek. Ennek eredményeképpen tehát beláttuk, ha indirekt feltevésünk igaz, úgy a megfelelő konstrukcióban tetszőleges $d_0, d_1, \dots, d_{m+1}$ sorozatra $i = 1, \dots, m$ esetén

$\|d_i\| = 2 \cdot \|d_{i-1}\|$ teljesül. Hasonló megfontolással igazolható, hogy konstrukciónkban $\|d_0\| = 1$, hiszen $\|d_0\| \geq 2$ esetén $\|d_{m+1}\| \geq 2^{m+1} > k$ értelemszerűen nem lehetséges.

Jelöljük a továbbiakban a d_i doboz sorszámát (d_i) -vel. Amennyiben $\|d_0\| = 1$, akkor $(d_1) = 1$, ám $\|d_1\| = 2 \cdot \|d_0\| = 2$, tehát $(d_2) = 2$, és gondolatmenetünket rekurzív módon folytatva könnyedén igazolható, hogy tetszőleges $i = 1, \dots, m$ esetén $(d_i) = 2^{i-1}$. Valamint, $\|d_m\| = \|d_{m+1}\|$ alapján $(d_{m+1}) = \|d_m\| = 2^m$, a játék végállapotában tehát a 2^m sorszámú dobozban 2^m golyó található (továbbá azt is igazoltuk, hogy tetszőleges, az eljáráshoz tartozó, különböző $d_0, d_1, \dots, d_n$ és $d'_0, d'_1, \dots, d'_n$ sorozatok legfeljebb az első elemekben térhetnek el egymástól).

Ezzel megoldásunkat lényegében befejeztük; mint látni fogjuk, vizsgált eseteinkben azonos módon juthatunk ellentmondásra, imént igazolt lemmáinkra építkezve; ennek módját elsőként a $k = 2^m + 1$ esetben mutatjuk be.

$k = 2^m + 1$ ($m \geq 2$): Ha valamely k -ra létezik $m+1$ lépésszámú konstrukció, annak végállapotában 2^m golyó található a 2^m sorszámú dobozban. A maradék egy golyó szükségszerűen az első dobozban található, hiszen a végállapotban minden doboz üres, vagy rendes. Második lemmánk értelmében ekkor ez a golyó vagy kezdetben is ebben a dobozban volt fellelhető, vagy az első lépésben került oda; ha későbbi lépés során érkezett volna a dobozba, szükség szerint több golyóval együtt helyeztük volna bele. Azonban korábban beláttuk, hogy indirekt feltevésünk következményeként az eljárás 2. lépésében az 1. doboz tartalmát a második dobozba helyeztük át. Szintén második lemmánk értelmében az eljárás későbbi lépéseiben már nem kerülhet golyó az 1. dobozba, így az a végállapotban üres; ezzel ellentmondásra jutottunk.

Az előbbieket alapján az ellentmondás elérése általános esetben is hasonlóan végezhető, kihasználva korábban igazolt eredményünket, nevezetesen, hogy $k = 2^m + 2^\alpha$ alakú, melyben $\alpha < 3$, így 2^α -t tetszőlegesen bontva fel pozitív egészek összegére, a tagok között legalább egy 2-hatvány szerepel.

Feltételezett konstrukciónk létezése esetén a végállapotban a 2^m sorszámú doboz 2^m golyót tartalmaz. Mivel a végállapotban minden doboz üres vagy rendes, létezik $\beta \in \mathbb{N}$, amelyre a 2^β sorszámú doboz a végállapotban 2^β golyót tartalmaz. Ezen golyók nem érkezhettek a β -dik lépésnél később, ám a dobozt a $(\beta + 1)$ -edik lépésben kiürítettük, és abba a játék során többet nem érkezett golyó. Ennek értelmében valamennyi eset vizsgálatát elvégezve ellentmondásra jutottunk, tehát indirekt feltevésünk nem lehetett igaz; ezzel a bizonyítást befejeztük.

Összefoglalás

Eredmény: k (≥ 2) golyó és k doboz esetén a varázsló suhintásainak maximális száma

- $\lceil \log_2 k \rceil + 1$, ha $k = 3, 6, 12$, vagy tetszőleges $m \in \mathbb{Z}^+$ esetén $k \neq 2^m + 1$; $k \neq 2^m + 2$; $k \neq 2^m + 4$.
- $\lceil \log_2 k \rceil$, ha alkalmas $m \in \mathbb{Z}^+$ -re $k = 2^m + 1$ ($m \geq 2$), $k = 2^m + 2$ ($m \geq 3$) vagy $k = 2^m + 4$ ($m \geq 4$).

Néhány érdekes további kérdés

A „játék a varázsló ellen” változat egyik jelentős eltérése a korábban ismertetettekhez képest az eljárás teljes determináltsága. A korábbi változatokban a lépésszám maximumának eléréséhez megfelelő elrendezést, és megfelelő kezdőlépést kellett választanunk, ez utóbbi változatban azonban nincs értelme „első lépésről” beszélnünk, az eljárás hossza kizárólag az elrendezés függvénye. Áldozatunk tehát tehetetlen, megfelelő elrendezés választásával valóban „kényszeríteni” tudjuk a megadott számú lépés elvégzésére, a játék során nincs lehetősége annak befolyásolására.

Ezzel egybevetve, az eddigiekben az „egyszerű” és az „ismétléses dobozos játékok” esetén sem beszélhettünk „kényszerítésről”, hiszen a szabályok közt szereplő véletlenszerű dobozválasztás következményeként az elrendezés készítőjének, és az áldozatnak sem áll rendelkezésére olyan stratégia, mellyel a lépésszámot ellenfele ténykedésétől függetlenül az elérhető maximumnál kisebb korlát fölé, illetve alá szoríthatja. Ezen feltétel elhagyásával azonban (azaz, amennyiben a játékos szabadon választhatja meg lépéseit) már érdemben beszélhetünk optimális dobozválasztásról, amely választást alkalmazva a játékos az eljárás során végrehajtandó lépések számát minimalizálni képes.

Váltsunk ezért elemzésünkben nézőpontot egy pillanatra: önként jelentkeztünk a „módosított egyszerű dobozos játékra” játékosnak, ahol eljárásunk kezdő dobozát szabadon választhatjuk meg ellenfelünk elrendezésében. Célunk értelemszerűen minél kevesebb lépésben befejezni a játékot. A korábbi eredményeket olvasva tisztában vagyunk vele, hogy a játék során k doboz esetén legfeljebb k lépés megtételére kényszerülünk, és ennek bekövetkezését ellenfelünk csupán egyetlen konstrukció választása mellett remélheti (melyet fentebb már ismertettünk), és kizárólag abban az esetben, ha a kezdőlépésben a k sorszámú dobozt választjuk. Egy ettől eltérő doboz választásával tehát ténykedésünket garantáltan legfeljebb $k - 1$ lépésben befejezzük.

Az imént megfogalmazottaknál jóval meglepőbb, hogy ennél kisebb lépésszám elérését még a kezdőlépés szabad megválasztása mellett sem garantálhatjuk. Azaz, tetszőleges $1 \leq i \leq k$ esetén készíthető olyan elhelyezése a dobozoknak, amely elrendezésnél az eljárást az i -edik dobozból indítva, legalább $k - 1$ lépés megtételére kényszerülünk. (Itt ezek ismertetésére nem térünk ki, biztatjuk az olvasót, hogy a korábbi feladatokban bemutatott konstrukciók ötleteit tanulmányozva önállóan próbálkozzon ilyen elrendezések készítésével.)

A dobozos játékok ismertetett változatainak közös sajátossága a dobozok, illetve a bennük elhelyezendő golyók számának egyezése. A probléma egy lehetséges általánosításaként korábban feltett kérdéseink vizsgálatát elvégezhetjük eltérő doboz- és golyószám esetén is. Nyilvánvalóan nem érdemes a dobozok számát a golyók száma fölé növelni, hiszen játékunk lényegében az eredetivel egyenértékű marad. Ha a golyók számát növeljük a dobozszám fölé, előfordulhat, hogy eljárásunk valamely lépését nem tudjuk elvégezni, mert nem létezik a kívánt sorszámú doboz. Az ilyen helyzeteket nevezetjük „hibának” az adott eljárásban, és vizsgálhatjuk ezek létrejöttének feltételeit. Amennyiben eltérő doboz és golyószám esetén is garantálni szeretnénk a problémamentes végrehajthatóságot, lehetséges megoldásul szolgál a golyók dobozszám szerinti maradék alapján történő csoportosítása az eljárás egy-egy lépésében. Az ily módon definiált játékban ismét vizsgálhatjuk az eljárás végeességét, a véges eljárás maximális lépésszámát, és további érdekes tulajdonságokat.

Játékunk vizsgálatának lezárásaként a feltett kérdések egy másik lehetséges általánosítására szeretném felhívni az olvasó figyelmét. Klasszikus dobozos játékunk és a varázsló ellen vívott „párbaj” határesetei voltak az ismertetett játék egy változatának, melyet „küzdelem a megfáradt varázsló ellen” névvel illelhetnénk. Játékunk ezen változatában a varázsló első suhintását megelőzően véletlenszerűen kiválaszt t db dobozt ($1 \leq t \leq k$ játékunk paramétere), melyekre varázsereje kiterjed. Az első suhintás elvégzésekor kizárólag a megjelölt dobozok golyói mozdulnak meg, míg a későbbi suhintások során azon dobozok golyói „indulnak útra”, amelyekbe az előző suhintás alkalmával golyó érkezett, és a doboz ennek következtében nem vált „rendessé”.

A varázsló célja ebben az esetben is a végállapot elérése, minél kevesebb suhintás végzésével. A továbbiakban a suhintások számának lehetséges maximumát szeretnénk meghatározni t függvényében, rögzített, kellően nagy k érték és $1 \leq t \leq k$ esetén. Látható, hogy az „egyszerű dobozos játék” és a „játék a varázsló ellen” ismertetett játékunk $t = 1$ és $t = k$ eseteit fedik le. Jelen cikkben elvégeztük az említett határhelyzetek vizsgálatát, pontos becslést adva a

lépésszámok maximumára. Általános esetben, rögzített k mellett növelve a t változó értékét, a lépésszám maximumának függvényén az $f(x) = x$ és

$g(x) = \log_2(x)$ függvények közötti átmenet figyelhető meg, melynek vizsgálata lényegesen bonyolultabb, és további érdekes kérdéseket hordoz magában.