I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$(x-2)^2+\sqrt{4-4x+x^2}+\frac{6x-18}{3-x}=0. \qquad (11\ pont)$$

Megoldás. Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.
Az egyenlet ekvivalens átalakításai:

$$(x-2)^2+\sqrt{(x-2)^2}+\frac{-6(3-x)}{3-x}=0,$$

$$(x-2)^2+|x-2|-6=0,$$

$$\big(|x-2|+3\big)\big(|x-2|-2\big)=0.$$

Az első tényező minden x esetén pozitív, a második tényező $|x-2|=2$ esetén lesz 0. Az egyenlet két megoldása a 0 és 4. Ezek helyessége ellenőrizhető.

2. *Az Aggteleki Nemzeti Park egyik legféltettebb, fokozottan védett növényritkasága a tornai vértő. Eszmei értéke* 250 000 Ft.

A növény tulajdonságait vizsgáló kutató úgy tapasztalta, hogy a tornai vértő növekedését közelítőleg a $h(x)=2+\log_2(x+1)$ *hozzárendelésű függvény írja le. A növény magassága* h *cm, az eltelt idő pedig* x *nap,* $x\in[0;7]$.

a) Milyen magas a mérés utolsó napján a növény? (*3 pont*)

b) Melyik napon éri el a magassága a 4 cm*-t?* (*3 pont*)

c) Magyarországon még jelentős az állomány. Az Európai Unióban lévő állomány kb. 30%*-a található itt, mintegy* 600 000 *példány. Évi* 4%*-os csökkenéssel számolva mennyi idő alatt csökken a magyarországi állomány a negyedére?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) $h(7)=2+\log_2 8=2+3=5$. A mérés utolsó napján a növény 5 cm magas.

b) A $4=2+\log_2(x+1)$ egyenlet megoldása $x=3$. A harmadik napon éri el a magasság a 4 cm-t.

c) 4%-os csökkenés mellett n év múlva az állomány példányszáma $600\,000\cdot 0{,}96^n$, ez az érték egyenlő az állomány negyedével, azaz

$$600\,000\cdot 0{,}96^n=\frac{600\,000}{4},$$

$$0{,}96^n=0{,}25,$$

$$\lg 0{,}96^n=\lg 0{,}25,$$

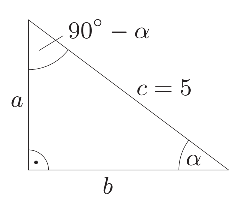
amiből a logaritmus azonosságának alkalmazásával:

$$n=\frac{\lg 0{,}25}{\lg 0{,}96}\approx 33{,}96.$$

Megközelítőleg 34 év alatt csökken az állomány a negyedére.

3. *Egy derékszögű háromszögben az átfogó hossza* 5*, a szögek szinusza pedig növekvő sorrendben egy számtani sorozat három egymást követő eleme. Mekkora a háromszög területe?* (*14 pont*)

Megoldás. A derékszögű háromszög szögei növekvő sorrendben: α, $90^\circ-\alpha$, 90°. Mivel 0°-tól 90°-ig a $\sin x$ szigorúan monoton növekvő, így $\sin\alpha<\sin(90^\circ-\alpha)<\sin 90^\circ$, azaz $\sin\alpha<\cos\alpha<1$.



Mivel ezek egy számtani sorozat egymást követő elemei, így $\dfrac{1+\sin\alpha}{2}=\cos\alpha$. Négyzetre emelhetünk és a $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ alkalmazásával kapjuk: $5\sin^2\alpha+2\sin\alpha-3=0$, melynek megoldásai $\sin\alpha$-ra 0,6 és -1. A -1 nem lehetséges, hiszen derékszögű háromszög szögei esetén $0<\sin\alpha\le 1$.

$$\sin\alpha=\frac{a}{5},\quad 0{,}6=\frac{a}{5},\quad a=3.$$

A Pitagorasz-tétel alkalmazásával: $3^2 + b^2 = 5^2$, amiből $b = 4$. A háromszög területe:

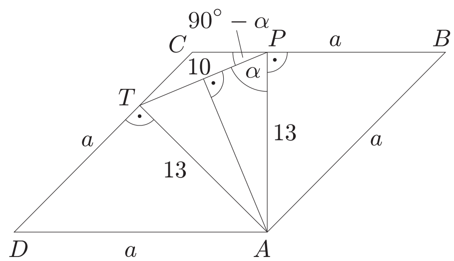
$$T = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6.$$

4. *Egy rombusz egyik tompaszögének csúcsából húzott két magasság hossza* 13, *a talppontjukat összekötő szakasz hossza pedig* 10.

a) Mekkorák a rombusz szögei? (*10 pont*)

b) Mekkora a rombusz kerülete? (*4 pont*)

Megoldás. *a*) $90° - \alpha$. Az APT háromszög egyenlőszárú a tengelyes szimmetria miatt. Így az alapjához tartozó magasság által keletkezett derékszögű háromszögben: $\cos\alpha = \frac{5}{13} \approx 0{,}3846$, melyből $\alpha \approx 67{,}38°$ és $90° - \alpha = 22{,}62°$.



A PTC háromszög is egyenlőszárú háromszög, így a C csúcsnál lévő szög $180° - 2(90° - \alpha) = 134{,}76°$.

Mivel a rombusz két szomszédos szögének összege 180°, így a rombusz hegyesszögei 45,24°-osak, tompaszögei 134,76°-osak.

b) Az APB derékszögű háromszögben $\sin 45{,}24° = \frac{13}{a}$, melyből $a \approx 18{,}31$. A rombusz kerülete: $K = 4a = 73{,}24$.

II. rész

5. *a*) *Hány darab négyjegyű szám képezhető a páros számjegyek felhasználásával, ha a számjegyek nem ismétlődhetnek?* (*3 pont*)

b) *Mennyi az így kapott négyjegyű számok összege?* (*5 pont*)

c) *Öt cédulára rendre felírva a páros számjegyeket, majd egy urnába téve négyet kihúzunk közülük, és ezeket a kihúzás sorrendjében egymás mellé tesszük. Mennyi a valószínűsége, hogy ha a kapott szám négyjegyű, akkor hattal osztható?* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) A páros számjegyek (0, 2, 4, 6, 8) felhasználásával kell négyjegyű számokat előállítani. Az első helyen négy számjegy (2, 4, 6, 8), a második helyen (ha már egyet rögzítettünk az első helyen) szintén négy számjegy, a harmadik helyen három, a negyedik helyen két számjegy jöhet szóba.

Tehát összesen $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ db megfelelő négyjegyű szám képezhető.

b) Ezen négyjegyű számokban

	0	2	4	6	8
1. helyen (ezresek)	0	24	24	24	24
2. helyen (százasok)	24	18	18	18	18
3. helyen (tízesek)	24	18	18	18	18
4. helyen (egyesek)	24	18	18	18	18

Tehát az összeg:

$$\begin{aligned} 0 \cdot 0 + (2+4+6+8) \cdot 24 \cdot 1000 &= 480\,000,\\ 24 \cdot 0 + (2+4+6+8) \cdot 18 \cdot 100 &= 36\,000,\\ 24 \cdot 0 + (2+4+6+8) \cdot 18 \cdot 10 &= 3600,\\ 24 \cdot 0 + (2+4+6+8) \cdot 18 \cdot 1 &= 360, \end{aligned}$$

azaz 519 960 az így kapott négyjegyű számok összege.

c) Egy szám osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal is. Mivel az utolsó jegy biztosan osztható 2-vel, így csak a 3-mal való oszthatóságot kell figyelembe venni. A négyjegyű számokban szereplő számjegyek a következők lehetnek:

I. 0, 2, 4, 6, II. 0, 2, 4, 8, III. 0, 2, 6, 8, IV. 0, 4, 6, 8, V. 2, 4, 6, 8.

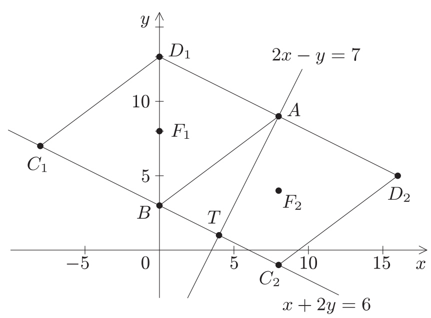
Ezek összes permutációját véve (az első helyen 0 nem állhat), csak az I. és II. helyen szereplő jegyekből előállítható négyjegyű számok oszthatóak 3-mal, hiszen csak ezekben az esetekben osztható a számjegyek összege 3-mal.

Mivel az első helyen 3 db, a második helyen 3 db, a harmadik helyen 2 db és a negyedik helyen 1 db számjegy állhat az I. és II. esetben, így a kedvező esetek száma $2 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 36$, az összes esetek száma 96, így a keresett valószínűség $p = \dfrac{36}{96} = 0{,}375$.

6. *Egy paralelogramma két szomszédos csúcsának koordinátái $A(8;9)$ és $B(0;3)$, egyik oldalegyenesének egyenlete $x+2y=6$. A paralelogramma területe 80. Határozzuk meg a hiányzó csúcsok koordinátáit.* (*16 pont*)

Megoldás. Az A és B koordinátáit behelyettesítve az adott egyenes egyenletébe látható, hogy az A pont nem, de a B pont az adott egyenesen rajta van. A paralelogramma területe $T = am$. A paralelogramma magasságát az A pontnak az adott egyenestől való távolsága adja. Az A ponton áthaladó és az adott egyenesre merőleges egyenes egyenletének meghatározása:

Az adott egyenes normálvektora: $\mathbf{n}_e(1;2)$. A keresett egyenes normálvektora $\mathbf{n}(2;-1)$, az adott pont $A(8;9)$. A keresett egyenes egyenlete: $2x-y=7$.



A két egyenes T metszéspontjának meghatározása: A $2x-y=7$ és az $x+2y=6$ egyenletrendszer megoldása: $x=4$, $y=1$, így $T(4;1)$. A paralelogramma magassága: $m = |\overrightarrow{AT}| = \sqrt{80} \approx 8{,}94$. Ezt a területképletbe behelyettesítve:

$$a = \frac{80}{\sqrt{80}} = \sqrt{80} \approx 8{,}94.$$

A $C(c_1;c_2)$ csúcs meghatározása: $a = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{c_1^2 + (c_2-3)^2} = \sqrt{80}$. Mivel C az adott egyenesnek is pontja, így $c_1 + 2c_2 = 6$. Egyenletrendszerként megoldva két C pontot kapunk: $C_1(-8;7)$, $C_2(8;-1)$.

Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, így az AC felezőpontja a két esetben: $F_1(0;8)$, $F_2(8;4)$, ami a BD felezője is. Ha $D(d_1;d_2)$ koordinátájú, akkor $F\left(\dfrac{d_1}{2};\dfrac{d_2+3}{2}\right)$, mely alapján $D_1(0;13)$, $D_2(16;5)$.

7. *Adott az $\mathbb{R} \setminus \{-1;6\}$ valós számokra értelmezett*

$$f(x) = \frac{2x^2-9x-11}{x^2-5x-6}$$

függvény.

a) Ábrázoljuk az f függvényt grafikonját. (*8 pont*)

b) Határozzuk meg f legkisebb és legnagyobb értékét a $[0;5]$ intervallumon. (*2 pont*)

c) Adjuk meg az f függvény grafikonjának 5 abszcisszájú pontjához húzható érintőjének egyenletét. (*6 pont*)

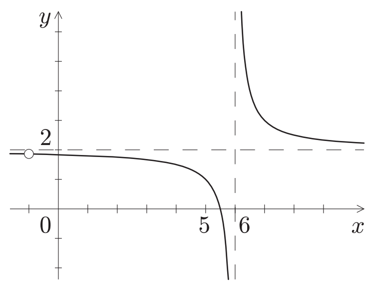
Megoldás. *a)* A $\dfrac{2x^2-9x-11}{x^2-5x-6}$ tört szorzatalakja:

$$\frac{2(x-5{,}5)(x+1)}{(x-6)(x+1)},$$

egyszerűsítés után $f(x) = \dfrac{2x-11}{x-6}$, mely az

$$f(x) = \frac{1}{x-6} + 2$$

hiperbolát adja.



b) Mivel a függvény a $[0;5]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, ezért a legkisebb értéket az $x=5$ helyen veszi fel: $f(5)=1$, a legnagyobb értéket az $x=0$ helyen veszi fel: $f(0)=\frac{11}{6}$.

c) Az érintő egyenlete: $y-y_0=m(x-x_0)$, ahol $x_0=5$, $y_0=1$ és $m=f'(x_0)$.

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x-6}+2\right)'=-\frac{1}{(x-6)^2},$$

így $m=f'(5)=-1$. Az érintő egyenlete: $y-1=-(x-5)$, azaz $y=-x+6$.

8. *Vágjunk ki papírból egy* 4 dm *oldalú négyzetet és egy* 4 dm *oldalú szabályos háromszöget, majd vágjuk átlói mentén a négyzetet négy egybevágó derékszögű háromszögre. Három egyenlő szárú derékszögű háromszögből és az egyenlő oldalú háromszögből gúla hálózata állítható össze, mely egy építmény* 1 : 20 *arányú kicsinyített mása az éleket tekintve.*

a) *Mekkora az építmény felszíne, ha az alaplapot is hozzászámítjuk?* (*9 pont*)

b) *A tömör építményt betonból szeretnénk elkészíteni. Mekkora mennyiséget fogunk felhasználni az egyes anyagokból, ha* 10 m^3 *betonhoz* 2500 kg *cementre,* 12 m^3 *sóderre és* 2400 l *vízre van szükség?* (*5 pont*)

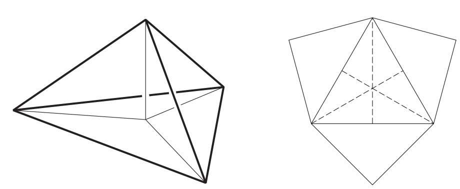
c) *Mekkora a bedolgozott beton anyagköltsége, ha a megrendeléstől a szállításig (a kifizetéséig) az anyagárak* 15%*-kal emelkedtek, és a tervezéskor* 1 *mázsa cement ára* 3100 Ft, 1 m^3 *sóder ára* 4200 Ft *volt? (A vizet saját kútból vettük, így az nem növelte a költségeket.)* (*3 pont*)

Megoldás. *a*) Az építmény oldalai a hasonlóság alapján 20-szorosára növekedtek, vagyis a 4 dm a valóságban 8 m lesz.

A Pitagorasz-tétel alapján a derékszögű háromszögek befogói $a=\frac{8}{\sqrt{2}}$. Az építmény felszíne:

$$A=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{a^2}{2}=8\sqrt{3}+3\cdot 16\approx 61{,}86.$$

Az építmény felülete kb. 61,86 m^2.



b) Az építmény térfogatának kiszámításához tekintsük alaplapnak az egyik derékszögű háromszöget. Ekkor a térfogat:

$$V=\frac{T\cdot a}{3}=\frac{16\cdot\frac{8}{\sqrt{2}}}{3}\approx 30{,}17.$$

Mivel a 10 m^3 betonhoz tudjuk a hozzávalókat, azért mindegyik anyagmennyiség 3,017-szeresét kell venni. Vagyis cementből 7542,5 kg, sóderből 36,204 m^3, vízből 7240,8 l a szükséges anyagmennyiség.

c) Tervezéskor a cement $75{,}425\cdot 3100=233\,817{,}5$ Ft-ba, a sóder $36{,}204\cdot 4200=152\,056{,}8$ Ft-ba került. Ez összesen 385 874,3 Ft.

A bedolgozott beton anyagköltsége: $385\,874{,}3\cdot 1{,}15\approx 443\,755$ Ft.

9. *Az* $f(x)=x^2+2x+p^3+3p^2+2p$ *hozzárendelésű másodfokú függvénynek két különböző zérushelye van. Határozzuk meg a* p *paraméter értékét úgy, hogy a zérushelyek szorzata az* f *függvény* 0 *helyen felvett értékének négyzetével legyen egyenlő.* (*16 pont*)

Megoldás. Az $f(x)$ két különböző zérushelye miatt az $x^2+2x+p^3+3p^2+2p=0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsának pozitívnak kell lennie, azaz

$$D=4-4(p^3+3p^2+2p)>0,\qquad\text{vagyis}\qquad p^3+3p^2+2p<1.$$

A zérushelyek szorzata a gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján:

$$x_1x_2 = p^3 + 3p^2 + 2p.$$

A függvény 0 helyen felvett értéke: $f(0) = p^3 + 3p^2 + 2p$.

A feladat szövege szerint: $p^3 + 3p^2 + 2p = (p^3 + 3p^2 + 2p)^2$, mely $y = p^3 + 3p^2 + 2p$ helyettesítéssel $y = y^2$ hiányos másodfokú egyenlet alakban írható. Ennek megoldásai: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

1. eset: $p^3 + 3p^2 + 2p = 0$. Kiemeléssel a $p(p^2 + 3p + 2) = 0$ alakot kapjuk, ennek megoldásai: $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = -2$.

2. eset: $p^3 + 3p^2 + 2p = 1$. A diszkrimináns vizsgálatakor kapott feltétel miatt ez nem lehetséges.

Vagyis a paraméter lehetséges értékei: $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = -2$. Ellenőrzéssel helyességük igazolható.