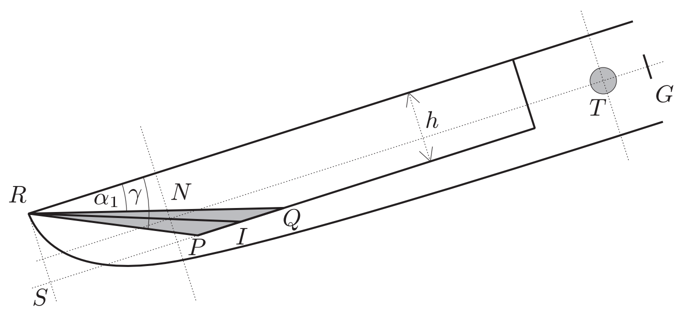
1. feladat. „Vízzel hajtott rizshántoló mozsár”

1. *A mozsár felépítése*

1.1. *A TG távolság kiszámítása.* A kanálban összegyűlt 1 liter víz forgatónyomatéka egyensúlyt tart az emelőrúd súlyából származó forgatónyomatékkal. Geometriai megfontolásokból kiszámíthatjuk, hogy 1 liter víz esetén a kanálban a vízmagasság 1,2 cm, és ennek a vízmennyiségnek a súlypontja nagyjából 47 cm-re van a T forgástengelytől. Mivel az emelőrúd tömege 30-szor nagyobb 1 liter víz tömegénél, így a kérdéses TG távolság

$$\frac{47}{30}\ \text{cm} = 1{,}57\ \text{cm} \approx 1{,}6\ \text{cm}.$$

1.2. *Az α_1 és α_2 értékek kiszámítása.* Amikor az emelőrúd α_1 dőlésszögénél a víz eléri a kanál peremét, akkor az *1. ábrán* látható helyzetet veszi fel. Ekkor a kanálban lévő 1 liter víz egy háromszög alapú egyenes hasábot tölt ki, melynek térfogatát könnyen felírhatjuk: $V = \dfrac{hb(PQ)}{2} = 1$ liter, ahol $b = 15$ cm a kanál szélessége. A számítás $PQ \approx 11{,}1$ cm eredményre vezet.



1. ábra

Az emelőrúd α_1 dőlésszögét így számíthatjuk ki:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{h}{SQ} = \frac{h}{PQ + \sqrt{3}h},$$

amiből $\alpha_1 = 20{,}6°$.

A kanálból akkor távozik az összes víz, ha az emelőrúd dőlésszöge: $\alpha_2 = \gamma = 30°$.

1.3. *A nulla forgatónyomatékhoz tartozó β szög és m_1 víztömeg kiszámítása.* Használjuk újra az előző *ábrát,* és ahol csak lehet, írjuk be a képletekbe a numerikus értékeket. Jelöljük a PQ távolságot x-szel, amit mérjünk méterben: $PQ = x$ (m), amivel így adhatjuk meg a kanálban maradó víz m tömegét kilogrammban: $m = \varrho_{\text{víz}}\dfrac{xhb}{2} = 9x$ (kg). A víz súlypontja a PQR háromszög súlypontjában van, az RI súlyvonal 2/3 részénél. A szerkezet geometriai elrendezéséből következik, hogy az emelőrúd G súlypontja, a T forgástengely (középpontja) és a kanálban maradó víz N súlypontja egy egyenes mentén helyezkedik el. A forgatónyomaték egyensúlyt így írhatjuk fel:

$$mg \cdot TN = Mg \cdot TG \Rightarrow m \cdot TN = M \cdot TG = 30 \cdot 0{,}0157 = 0{,}471\ \text{(kgm)}.$$

A TN távolságot így írhatjuk fel:

$$TN = L + a - \frac{2}{3}\left(\sqrt{3}h + \frac{x}{2}\right) = 0{,}94 - 0{,}08\sqrt{3} - \frac{x}{3} = 0{,}801 - \frac{x}{3}.$$

Az eddig meghatározott három kifejezésből ($m = 9x$; $TN = 0{,}801 - \dfrac{x}{3}$; $m \cdot TN = 0{,}471$) a következő másodfokú egyenletre juthatunk: $3x^2 - 7{,}21 + 0{,}471 = 0$, melynek számunkra értelmes gyöke: $x = 0{,}0672$. Így a kérdéses tömeg: $m = 9x = 0{,}605$ kg, továbbá a dőlési szöget így határozhatjuk meg:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{x + \sqrt{3}h} = 0{,}436, \quad \text{amiből} \quad \beta = 23{,}6°.$$

2. *A rendes munkavégző körfolyamat mennyiségei*

2.1. *A $\mu(\alpha)$ forgatónyomaték függvény ábrázolása az α szög függvényében.* Kezdetben ($\alpha = 0$) nincs víz a kanálban. Ekkor az emelőrúdra ható forgatónyomaték:

$$Mg \cdot TG = 30 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}0157 = 4{,}62\ \text{Nm} \approx 4{,}6\ \text{Nm}.$$

Tekintsük ezt a forgatónyomatékot negatív előjelűnek, a negatív forgatónyomaték a rúd dőlésszögét csökkenteni igyekszik. Amikor lassan víz folyik a kanálba, az eredő forgatónyomaték növekedni kezd egészen addig, amíg kissé pozitívvé válik, és a mozsártörő emelkedni kezd. Ezt követően azzal a közelítéssel dolgozunk, hogy a kanálban lévő víz mennyisége nem változik.

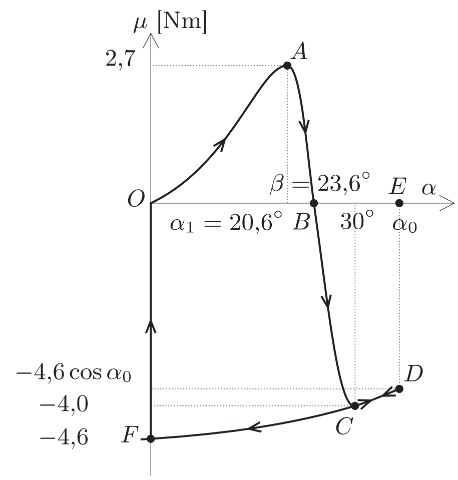
Miközben a kanál lefelé billen, a benne lévő víz tömegközéppontja fokozatosan eltávolodik a forgástengelytől, így μ egészen addig növekszik, amíg a víz eléri a kanál peremét. Tehát a maximális forgatónyomaték az $\alpha = \alpha_1 = 20{,}6^\circ$-os dőlésszögnél jön létre. Az előző részben már megismert számoláshoz hasonlóan kiszámíthatjuk, hogy $\mu_{\max} \approx 2{,}7$ Nm.

A rúd további dőlése közben a víz elkezd kifolyni a kanálból, és $\alpha = \beta$ esetén $\mu = 0$-vá válik. A tehetetlenség következtében α tovább növekszik, miközben μ csökken. $\alpha = 30^\circ$ esetén a kanál teljesen kiürül. Ebben a helyzetben a forgatónyomaték: $\mu = -Mg \cdot TG \cdot \cos 30^\circ = -4{,}0$ Nm. Ezután a tehetetlenség következtében a szög még tovább nő, egészen $\alpha = \alpha_0$ értékig, amikor a forgatónyomaték: $\mu = -Mg \cdot TG \cdot \cos\alpha_0 = -4{,}6 \cdot \cos\alpha_0$ Nm. Végül a dőlésszög hirtelen nullára csökken (a mozsártörő lecsap), és a körfolyamat $\mu = -4{,}6$ Nm értékkel újra kezdődik.

A fentiek alapján felvázolhatjuk a $\mu(\alpha)$ forgatónyomatékot az α szög függvényében (*2. ábra*):

2.2. *A mozsártörő munkavégzésének grafikus értelmezése.* A $\mu(\alpha)$ forgatónyomaték által végzett W_{teljes} teljes munkavégzést a forgatónyomaték előjeles görbe alatti területeként számíthatjuk ki a teljes $OABCDFO$ körfolyamatra. A mozsártörőnek átadott $W_{\text{ütés}}$ energiát az α_0-tól 0-ig tekintett görbe alatti terület mérőszámaként kaphatjuk meg ($EDFOE$), melynek nagysága:

$$Mg \cdot TG \cdot \sin\alpha_0 = 4{,}6 \text{ J} \cdot \sin\alpha_0.$$



2. ábra

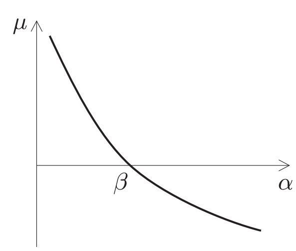
2.3. *Az α_0 szög és $W_{\text{ütés}}$ becslése.* Az α_0 szög értékét abból becsülhetjük meg, hogy ebben a pozícióban az emelőrúd energiája nulla, vagyis az $OABO$ terület megegyezik a $BEDCB$ terület nagyságával. Ha az $OABO$ területet háromszöggel, a $BEDCB$ területet pedig trapézzal közelítjük, akkor az α_0 szög értékére közelítőleg 35°-ot kapunk. Így a mozsártörő által végzett munka:

$$W_{\text{ütés}} = Mg \cdot TG \cdot \sin\alpha_0 = 4{,}6 \text{ J} \cdot \sin 35^\circ \approx 2{,}6 \text{ J}.$$

3. A mozdulatlan állapot

3.1. *Az emelőrúd mozgása az $\alpha = \beta$ egyensúlyi helyzet közelében.*

3.1.1. Az $\alpha = \beta$ egyensúlyi helyzet közelében a forgatónyomaték nagyjából a *3. ábrán* látható módon változik. A grafikon alapján megállapíthatjuk, hogy az egyensúlyi helyzet stabil.



3. ábra

3.1.2. Az α szögben megdőlt rúd esetén a kanálban lévő víz tömege:

$$m = \frac{\varrho b h \cdot PQ}{2}, \quad \text{ahol} \quad PQ = h\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ}\right).$$

Miközben a rúd hajlásszöge β-ról $(\beta+\Delta\alpha)$ értékre változik, a kanálban lévő víz tömegének megváltozása közelítőleg:

$$\Delta m = -\frac{bh^2\varrho}{2\sin^2\alpha}\Delta\alpha \approx -\frac{bh^2\varrho}{2\sin^2\beta}\Delta\alpha.$$

A $(\beta+\Delta\alpha)$ dőlésszögű rúdra ható μ forgatónyomaték megegyezik a Δm tömegből származó nyomatékkal:

$$\mu = \Delta mg\cdot TN\cdot\cos(\beta+\Delta\alpha).$$

A TN távolságot a rúd β szöghöz tartozó egyensúlyi állapotából határozhatjuk meg:

$$TN = \frac{M\cdot TG}{m} = \frac{30\cdot 0{,}0157}{0{,}605} = 0{,}779\ \mathrm{m}.$$

Végül a forgatónyomatékra közelítőleg ezt a numerikus kifejezést kapjuk: $\mu\approx -47\cdot\Delta\alpha$ (Nm).

3.1.3. Alkalmazzuk a rúd mozgására a forgómozgás dinamikai alapegyenletét ($\mu = I\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, ahol $\alpha=\beta+\Delta\alpha$), melyben az I tehetetlenségi nyomaték nem csupán a rúdtól, hanem a kanálban lévő víz tömegétől is függ. Tegyük fel, hogy kicsiny $\Delta\alpha$ szögek esetén a kanálban lévő víz tömege állandó ($\approx 0{,}6$ kg) és ezt a vízmennyiséget tekintsük tömegpontnak. A számítás a rendszer tehetetlenségi nyomatékára közelítőleg $I\approx 12{,}4\ \mathrm{kg\,m^2}$-et ad. Így a mozgásegyenlet numerikus alakja (SI egységrendszerben):

$$-47\cdot\Delta\alpha = 12{,}4\frac{d^2\Delta\alpha}{dt^2},$$

ami egy harmonikus rezgőmozgás egyenlete. A mozgás rezgésideje:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{12{,}4}{47}}\approx 3{,}2\ \mathrm{s}.$$

3.2. *A vízhozam számítása kis amplitúdójú rezgés esetén.* Az emelőrúd szögkitérésének időfüggését így írhatjuk fel az egyensúlyi helyzet körül:

$$\Delta\alpha = -\Delta\alpha_0\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right),\quad \text{ahol}\quad \Delta\alpha_0 = 1^\circ.$$

Ilyenkor a rúd a $t=0$ kezdőpillanat után a kisebb szögkitérések felé indul el, és ott nagyobb vízmennyiségre van szükség a túlfolyás elérésére. Rövid dt idő alatt a rúd lehajlása $d\alpha$ szöggel változik meg:

$$d(\Delta\alpha) = d\alpha = -\Delta\alpha_0\frac{2\pi}{\tau}\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\cdot dt.$$

A túlfolyáshoz ennyi idő alatt legalább a következő mennyiségű víznek kell a kanálba csorognia:

$$dm = -\frac{bh^2\varrho}{2\sin^2\beta}\,d\alpha = \frac{2\pi\Delta\alpha_0 bh^2\varrho\,dt}{2\tau\sin^2\beta}\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right).$$

Ennek maximuma $t=0$-nál van, vagyis a túlfolyás akkor lesz folyamatos, ha a vízhozamra ($dm=\Phi\,dt$) teljesül, hogy

$$\Phi\ge\Phi_1 = \frac{\pi bh^2\varrho}{\tau\sin\beta}\Delta\alpha_0 = \frac{\pi bh^2\varrho}{\tau\sin\beta}\cdot\frac{2\pi}{360}\approx 0{,}23\ \mathrm{kg/s},$$

ahol a rezgés 1°-os szögamplitúdóját $\frac{2\pi}{360}$ radián alakban írtuk fel.

3.3. *Mekkora minimális vízhozam esetén nem működik a mozsár?* Ha a kanál eléri a $20{,}6^\circ$-os dőlési szöget, miközben mindvégig túlcsordul, akkor benne 1 kg víz lesz, és a rezgési amplitúdója $23{,}6^\circ-20{,}6^\circ = 3^\circ$-os lesz. Eltekintve a rendszer tehetetlenségi nyomatékának változásától (amit a növekvő vízmennyiség okoz), a háromszoros amplitúdó háromszoros vízhozamot is jelent: $\Phi_2 = 3\Phi_1\approx 0{,}7$ kg/s. Ennél nagyobb vízhozam esetén a rizshántoló mozsár nem tud működni.

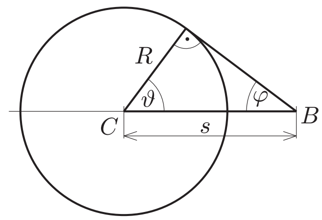
2. feladat. Cserenkov-sugárzás és gyűrűs képalkotáson alapuló számláló

Mialatt a részecske t idő alatt a C pontból $s=vt=t\beta c$ utat megtéve a B pontba ér, a C pontban kibocsátott fény egy $R=t\frac{c}{n}$ sugarú gömböt ér el.

Így a hullámfront a B-ből a gömbhöz húzott érintő kúp, amely

$$\varphi = \arcsin\frac{R}{s} = \arcsin\frac{1}{\beta n}$$

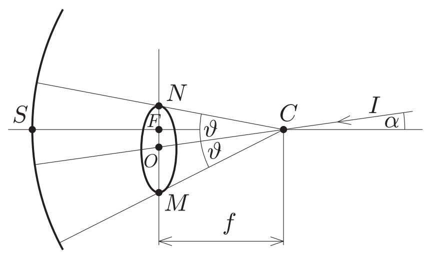
szöget zár be a részecske pályájával.



4. ábra. A hullámfront szerkesztése

Adott irányból párhuzamosan érkező fénysugarakat a homorú gömbtükör a fókuszsíkba képzi. A kép pontos helyét a tükör C geometriai középpontján áthaladó sugármenet metszi ki, amely visszaverődés után szintén keresztülhalad C-n.

Az *5. ábrán* felrajzoltuk az optikai tengelyhez képest α, $\alpha+\vartheta$ és $\alpha-\vartheta$ szögben haladó C-n átmenő fénysugarakat, melyek a fókuszsíkot az O, M és N pontban metszik. A tükör által alkotott kép (kis α, ϑ szögek esetén) egy $r = OM = ON = f\vartheta$ sugarú kör, melynek O középpontja $OF = f\alpha$ távolságra esik az F fókuszponttól.



5. ábra. A gyűrűs kép létrejötte

3.1. A $p = \dfrac{Mv}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (relativisztikus) impulzus képletéből az M nyugalmi tömeg ismeretében kifejezhető a részecskék $\beta = \dfrac{v}{c}$ dimenziótlan sebessége:

$$\beta = \left(1 + \left(\frac{Mc^2}{pc}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1-\delta, \quad \text{ahol} \quad \delta = \frac{1}{2}\left(\frac{Mc^2}{pc}\right)^2. \tag{1}$$

Az utolsó közelítés akkor érvényes, ha $\delta \ll 1$. Ez esetünkben jó közelítéssel fennáll mindhárom részecskére:

$$\delta_\mathrm{p} = 4{,}42\cdot 10^{-3}, \qquad \delta_\kappa = 1{,}25\cdot 10^{-3}, \qquad \delta_\pi = 9{,}8\cdot 10^{-5}. \tag{2}$$

A Cserenkov-effektus akkor lép fel, ha a részecske v sebessége nagyobb a közegbeli $\dfrac{c}{n}$ fénysebességnél, ahol n a törésmutatót jelöli. Határesetben $v = \dfrac{c}{n_\mathrm{min}}$, tehát a minimális törésmutató, amely mellett megfigyelhető a Cserenkov-effektus:

$$n_\mathrm{min} = \frac{1}{\beta} = \sqrt{1+\left(\frac{Mc^2}{pc}\right)^2} \approx 1+\delta.$$

A törésmutató ismeretében a kritikus nyomás $P_\mathrm{min} = \dfrac{n_\mathrm{min}-1}{a} = \dfrac{\delta}{a}$. A számszerű eredmények:

$$P_\text{min, proton} = 16\ \text{atm}, \qquad P_\text{min, kaon} = 4{,}6\ \text{atm}, \qquad P_\text{min, pion} = 0{,}36\ \text{atm}.$$

3.2. A gyűrűk sugara $r = f\vartheta$, ahol a sugárzási kúp ϑ félnyílásszögére a *4. ábra* alapján a $\cos\vartheta = \dfrac{1}{n\beta}$ egyenlőség teljesül. Most azt az $n_{\frac{1}{2}}$ törésmutatót keressük, amely mellett $2r_\kappa = r_\pi$, azaz $2\vartheta_\kappa = \vartheta_\pi$. Ezek felhasználásával

$$\frac{1}{n_{\frac{1}{2}}\beta_\pi} = \cos\vartheta_\pi = \cos(2\vartheta_\kappa) = 2\cos^2\vartheta_\kappa - 1 = \frac{2}{n_{\frac{1}{2}}^2\beta_\kappa^2} - 1.$$

Az egyenlőségsor első és utolsó eleme a

$$\beta_\pi\beta_\kappa^2 n_{\frac{1}{2}}^2 + \beta_\kappa^2 n_{\frac{1}{2}} - 2\beta_\pi = 0 \tag{3}$$

másodfokú egyenletet adja a keresett $n_{\frac{1}{2}}$ törésmutatóra, mely egyszerűen linearizálható, ha észrevesszük, hogy mind $n_{\frac{1}{2}}$, mind β_π és β_κ nagyon kicsit tér el 1-től:

$$\beta_\pi \approx 1-\delta_\pi, \quad \beta_\kappa \approx 1-\delta_\kappa, \quad n_{\frac{1}{2}} = 1+\eta. \tag{4}$$

Ezeket a közelítéseket (3)-ba beírva, és csak az elsőrendű tagokat tartva meg, az adódik, hogy:

$$\eta = \frac{4\delta_\kappa - \delta_\pi}{3} = 1{,}634 \cdot 10^{-3} \quad \text{és} \quad P_{\frac{1}{2}} = \frac{\eta}{a} = 6{,}05 \text{ atm.}$$

Ezen a nyomáson a protonok nem keltenek Cserenkov-sugárzást. A törésmutató ismeretében meghatározható a kaonok és pionok által keltett sugárzási kúp félnyílásszöge:

(5)
$$\vartheta_\kappa = \arccos\left(\frac{1}{n_{\frac{1}{2}}\beta_\kappa}\right) \approx \sqrt{2(\eta - \delta_\kappa)} = 2{,}77 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 1{,}6^\circ,$$

$$\vartheta_\pi = 2\vartheta_\kappa = 5{,}54 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 3{,}2^\circ.$$

(Ismert, hogy $x \ll 1$ esetén $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. Innen $\arccos(1-y) \approx \sqrt{2y}$, ahol $y = \frac{x^2}{2} \ll 1$. A közelítésnél ezt az összefüggést, valamint a (4) egyenleteket használtuk fel.)

4.1. Az (1) és (5) egyenletek alapján a ϑ félnyílásszög a p impulzus függvényében

(6)
$$\vartheta(p) \approx \sqrt{2\eta - \left(\frac{Mc^2}{pc}\right)^2}, \qquad \text{így} \qquad \frac{d\vartheta}{dp} \approx \frac{(Mc^2)^2}{\vartheta \cdot (pc)^3}c.$$

A számértékek behelyettesítése után azt kapjuk, hogy:

(7)
$$\frac{d\vartheta_\kappa}{dp} = \frac{9{,}03 \cdot 10^{-3} \cdot c}{\text{GeV}} = \frac{0{,}52^\circ \cdot c}{\text{GeV}}, \qquad \frac{d\vartheta_\pi}{dp} = \frac{3{,}54 \cdot 10^{-4} \cdot c}{\text{GeV}} = \frac{0{,}02^\circ \cdot c}{\text{GeV}}.$$

(A részecskefizikában az impulzus megadására gyakran használják az $\frac{\text{elektronvolt}}{\text{fénysebesség}}$ mértékegységet.)

4.2. A feltételekből az impulzus bizonytalansága:

$$\Delta p < \frac{\vartheta_\pi - \vartheta_\kappa}{10(\vartheta'_\kappa + \vartheta'_\pi)} = 0{,}3 \,\frac{\text{GeV}}{c}.$$

5. Adott n törésmutatójú közegben Cserenkov-sugárzás a $v_{\min} = \frac{c}{n}$ sebesség fölött észlelhető. Ennél a sebességnél a mozgási energia:

$$T_{\min} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{\min}^2}{c^2}}} - Mc^2 = Mc^2\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1\right) = 0{,}51 \cdot Mc^2.$$

α-részecskékre, illetve elektronokra ezek az értékek

$$T_\alpha = 0{,}51 \cdot 3{,}8 \text{ GeV} = 1{,}94 \text{ GeV}, \qquad T_\beta = 0{,}51 \cdot 0,51 \text{ MeV} = 0{,}26 \text{ MeV},$$

ami azt jelenti, hogy elektronok hozták létre a Cserenkov által észlelt sugárzást.

6.1. P nyomáson $\eta = n - 1 = aP$, tehát a látható tartomány két végpontjához tartozó törésmutatók eltérése $\Delta n = \Delta\eta = 0{,}02 \cdot aP = 3{,}24 \cdot 10^{-5}$. A keresett $\Delta\vartheta$ szögeltérés a (6) egyenletben felírt ϑ szög η változó szerinti differenciálásával kapható meg:

$$\Delta\vartheta_\pi = \frac{d\vartheta_\pi(\eta)}{d\eta}\Delta\eta = \frac{\Delta\eta}{\vartheta_\pi} = 0{,}033^\circ.$$

6.2. Az előző pontban láttuk, hogy a diszperzió miatti kiszélesedés félértékszélessége $\frac{\Delta\vartheta_\pi}{2} = 0{,}017^\circ$. A (7) egyenlet alapján az impulzus-inhomogenitás miatti kiszélesedés

$$\frac{0{,}02^\circ \cdot c}{\text{GeV}} \cdot \frac{0{,}3 \text{ GeV}}{c} = 0{,}006^\circ,$$

ami háromszor kisebb a diszperzióhoz tartozó kiszélesedésnél. Kisebb hullámhosszon a törésmutató nagyobb, tehát a Cserenkov-kúp nyílásszöge szélesebb. Ez azt jelenti, hogy a gyűrű színe kívül kékes, középen fehér, belül pedig vöröses.

3. feladat. A levegő hőmérsékletének magasság szerinti változása, a légköri stabilitás és a légszennyeződés

1.1. A z magasságban levő, $\varrho(z)$ sűrűségű, A területű, dz vastagságú levegőréteg $A\varrho(z)g\,dz$ súlya megegyezik a levegőréteg alján és tetején mérhető nyomáskülönbségből származó $-A\big(p(z+dz)-p(z)\big)$ erővel. Felhasználva, hogy $\varrho=\dfrac{\mu p}{RT_0}$, a nyomás magasságtól való függésére a

$$p'(z)=-\frac{\mu g}{RT_0}p(z)$$

differenciálegyenletet kapjuk, melynek megoldása

$$p(z)=p_0e^{-\frac{\mu g}{RT_0}z}.$$

1.2. Az előzőekhez hasonló érveléssel most a $p(z)$ függvényre a

$$p'(z)=-\frac{\mu g}{R\big(T(0)-\Lambda z\big)}p(z)$$

(ún. szeparálható) differenciálegyenlet vezethető le, mely a feladatban közölt segítséggel megoldható:

$$\int\frac{dp}{p}=\ln p+C_1;\qquad -\frac{\mu g}{R}\int\frac{dz}{T(0)-\Lambda z}=\frac{\mu g}{R\Lambda}\ln\big(T(0)-\Lambda z\big)+C_2,$$

ahonnan

$$p(z)=p_0\left(1-\frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\mu g}{R\Lambda}}.$$

A sűrűség magasságtól való függése:

$$\varrho(z)=\frac{\mu p(z)}{RT(z)}=\frac{\mu p_0}{RT(0)}\left(1-\frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\mu g}{R\Lambda}-1},$$

ami akkor monoton növekedő függvény, ha a kitevő negatív, azaz ha

$$\Lambda>\frac{\mu g}{R}=0{,}034\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}.$$

Érdemes észrevenni, hogy kis magasságok esetén a nyomás magasságfüggése mind az 1. pontban vizsgált izoterm légkör esetén, mind pedig a most vizsgált lineáris hőmérséklet-eloszlás esetén $p(z)\approx p_0\left(1-\dfrac{\mu g z}{RT(0)}\right)$ alakú. Tehát a légkör hőmérsékletének magassággal való változása „első rendben”, kis magasságok esetén nem befolyásolja a nyomás magasságtól való függését.

2.1. A levegőcsomag állapotváltozása adiabatikus, tehát kielégíti a

$$T_{\text{csomag}}\cdot p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}=\text{állandó}$$

állapotegyenletet, ahol $T_{\text{csomag}}(z)$ a levegőcsomag hőmérséklete, $p(z)$ pedig a környezet és a levegőcsomag közös nyomása. Mindkét mennyiség függ a z magasságtól. Differenciáljuk az adiabatikus állapotegyenletet z szerint:

$$T'_{\text{csomag}}\cdot p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}+T_{\text{csomag}}\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma}\cdot p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\cdot\frac{p'}{p}=0.$$

Az előző pontban láttuk, hogy $\dfrac{p'}{p}=-\dfrac{\mu g}{RT}$, ezt felhasználva kapjuk, hogy:

$$T'_{\text{csomag}}=-G,\quad\text{ahol}\quad G=\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{\mu g}{R}\,\frac{T_{\text{csomag}}}{T}.\tag{8}$$

2.2. Ha $T_{\text{csomag}}=T$, akkor

$$\Gamma=G|_{T_{\text{csomag}}=T}=\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{\mu g}{R}=\frac{\mu g}{c_p}=10^{-2}\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}},$$

és a hőmérséklet a $T(z)=T(0)-\Gamma z$ módon függ a magasságtól. (Ezt a speciális esetet *adiabatikus légkörnek* hívják.)

2.3. Ha a külső hőmérséklet $T(z)=T(0)-\Lambda z$ függvény szerint változik, akkor az (8) összefüggés szerint a $T_{\text{csomag}}(z)$ függvény a következő differenciálegyenletet elégíti ki:

$$T'_{\text{csomag}}(z)=-\frac{\Gamma}{T-\Lambda z}T_{\text{csomag}}(z).$$

Az 1.2. pontban már megoldottunk egy hasonló differenciálegyenletet ($p(z)$-re, más konstanssal), így mostani egyenletünk megoldását a megfelelő változók átírásával azonnal megkaphatjuk:

$$T_{\text{csomag}}(z) = T_{\text{csomag}}(0)\left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\Gamma}{\Lambda}} \approx T_{\text{csomag}}(0) - \Gamma z. \tag{9}$$

Az utolsó közelítés $|\Lambda z| \ll T(0) \approx T_{\text{csomag}}(0)$ esetén érvényes, amikor a hatványozás közelítésére használhatjuk az $(1+\varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$ formulát, amely $\varepsilon \ll 1$ esetén érvényes.

Érdemes észrevenni, hogy a kapott hőmérsékletfüggés megegyezik az adiabatikus légkör esetén kapottal. Ezen nem kell meglepődnünk, ha visszaemlékezünk az 1.2. pont végén kapott eredményünkre, mely szerint a külső nyomás (kis magasságok esetén, „első rendben") érzéketlen a hőmérsélket magasságfüggésére, a külső hőmérséklet pedig (feltevéseink szerint) nem befolyásolja a levegőcsomag hőmérsékletét.

3.1. A levegőcsomag és a külső levegő nyomása egyensúlyban van, tehát csak hőmérsékletük eltérése okozhat sűrűségkülönbséget. Ha $z > 0$ esetén a külső levegő

$$T(z) = T(0) - \Lambda z$$

hőmérséklete kisebb, mint a levegőcsomag

$$T_{\text{csomag}}(z) = T(0) - \Gamma z$$

hőmérséklete, azaz ha $\Lambda > \Gamma$, akkor a kissé felemelkedett levegőcsomag ritkább, mint környezete, tehát tovább emelkedik; a légkör instabil. $\Lambda = \Gamma$ esetén a légkör semleges, míg $\Lambda < \Gamma$ esetén stabil.

3.2. A levegőcsomag addig a h magasságig emelkedik, ahol hőmérséklete megegyezik a külső levegő hőmérsékletével, tehát, felhasználva a (9) egyenletet,

$$T(0) - \Lambda h = T_{\text{csomag}}(0)\left(1 - \frac{\Lambda h}{T(0)}\right)^{\frac{\Gamma}{\Lambda}}.$$

Innen a h magasságra azt kapjuk, hogy:

$$h = \frac{T(0)}{\Lambda}\left(1 - \left(\frac{T(0)}{T_{\text{csomag}}(0)}\right)^{\frac{\Lambda}{\Gamma-\Lambda}}\right) \approx \frac{T_{\text{csomag}}(0) - T(0)}{\Gamma - \Lambda}. \tag{10}$$

Az utolsó közelítés a

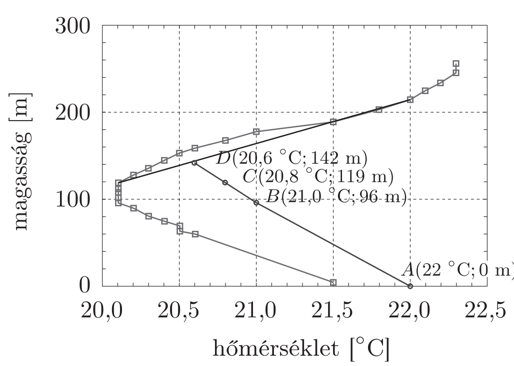
$$T_{\text{csomag}}(0) \approx T(0) \quad \text{és} \quad \frac{T_{\text{csomag}}(0) - T(0)}{T_{\text{csomag}}(0)} \ll 1$$

feltételek mellett érvényes, és a

$$\frac{T(0)}{T_{\text{csomag}}(0)} = 1 - \frac{T_{\text{csomag}}(0) - T(0)}{T_{\text{csomag}}(0)}$$

átírás után a hatványozás már megismert közelítésével kapható.

4.1. A *táblázatból* vett adatokat ábrázolva a következő *grafikont* kapjuk:



6. ábra. A légkör hőmérséklete a magasság függvényében

Ennek megfelelően a légkör három rétegre osztható, a középső réteg izoterm, míg a másik kettőben közel lineárisan változik a hőmérséklet:

1. réteg	$0\ \text{m} < z < 96\ \text{m}$	$\Lambda_1 = \dfrac{21{,}5\ \text{K} - 20{,}1\ \text{K}}{91\ \text{m}} = 15{,}4 \cdot 10^{-3}\ \dfrac{\text{K}}{\text{m}}$
2. réteg	$96\ \text{m} < z < 119\ \text{m}$	$\Lambda_2 = 0\ \dfrac{\text{K}}{\text{m}}$, izoterm szakasz
3. réteg	$119\ \text{m} < z < 215\ \text{m}$	$\Lambda_3 = \dfrac{20{,}1\ \text{K} - 22\ \text{K}}{215\ \text{m} - 119\ \text{m}} = -0{,}02\ \dfrac{\text{K}}{\text{m}}$

Látható, hogy a (9) egyenlet közelítésénél használt feltételek teljesülnek, így a felemelkedő, és adiabatikusan táguló levegőcsomag hőmérséklete a külső hőmérséklettől lényegében teljesen függetlenül a $\Gamma = 10^{-2}\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}$ együttható szerint lineárisan csökken. Így

$$T_{\mathrm{csomag}}(96\ \mathrm{m}) = 22\ {}^\circ\mathrm{C} - 0{,}96\ {}^\circ\mathrm{C} \approx 21{,}0\ {}^\circ\mathrm{C} \quad \text{és}$$
$$T_{\mathrm{csomag}}(119\ \mathrm{m}) = 22\ {}^\circ\mathrm{C} - 1{,}19\ {}^\circ\mathrm{C} \approx 20{,}8\ {}^\circ\mathrm{C}.$$

4.2. Látható, hogy 119 m magasan a levegőcsomag hőmérséklete még mindig 0,7 °C-kal magasabb, mint környezetéé. Alkalmazva a (10) egyenlet közelítő formuláját, azt kapjuk, hogy a levegőcsomag még további $\frac{0{,}7}{0{,}01+0{,}02}\ \mathrm{m} =$ 23 m-t emelkedik, mire környezetével hőmérsékleti egyensúlyba kerül. Tehát a keverési magasság

$$H = 119\ \mathrm{m} + 23\ \mathrm{m} = 142\ \mathrm{m},$$

és itt a hőmérséklet $T_{\mathrm{csomag}}(H) \approx 20{,}6\ {}^\circ\mathrm{C}$.

5.1. Az $L \times W \times H$ méretű téglatestben levő teljes szén-monoxid mennyiség két tényező miatt változik: egyrészt a motorok által kibocsátott mennyiséggel nő, másrészt a szél által kifújt mennyiséggel csökken. Tehát

$$LWHC'(t) = M - uLHC(t).$$

5.2. A fenti lineáris elsőrendű differenciálegyenletnek a $C(0) = 0$ kezdőfeltételt kielégítő megoldása:

$$C(t) = \frac{M}{LHu}\left(1 - e^{-\frac{u}{W}t}\right).$$

5.3. A fenti egyenletbe behelyettesítve a megadott adatokat, azt kapjuk, hogy a 8 órakor mérhető szén-monoxid koncentráció $C(3600\ \mathrm{s}) = 2{,}3\ \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{m}^3}$.