I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:*

a) $$\frac{x+3}{3} = \frac{x^2+3x-4}{2x^2+4x-16} \cdot (x+3);$$

b) $$\lg\left(6^x - 96\right) - 2 = \lg 2 + \lg 6.$$

(*11 pont*)

Megoldás. *a*) Alakítsuk szorzattá a másodfokú kifejezéseket:

$$x^2+3x-4 = (x+4)(x-1), \qquad 2x^2+4x-16 = 2(x-2)(x+4).$$

Kikötések: $x \neq 2$ és $x \neq -4$.

Mivel $x \neq -4$, egyszerűsíthetünk $(x+4)$-gyel, majd $6(x-2)$-vel beszorozva kapjuk a következő egyenletet: $2(x+3)(x-2) = 3(x-1)(x+3)$. Ennek megoldásai: $x=-3$ és $x=-1$. Mindkét szám megoldása az egyenletnek.

b) Kikötés a logaritmus miatt: $x > \log_6 96 \approx 2{,}547$. A logaritmus azonosságainak alkalmazásával és a logaritmus függvény szigorú monoton tulajdonságának felhasználásával felírható:

$$\frac{6^x - 96}{100} = 12.$$

Ennek az egyenletnek a megoldása: $x = 4$. Ez az eredeti egyenletnek is megoldása, mert minden feltételnek megfelel.

2. *Egy metró mozgólépcsőjén egy táska „a” másodperc alatt ér le a metrószintre. Egy utas „b” másodperc alatt teszi meg ugyanezt az utat a nem működő mozgólépcsőn. Mennyi idő alatt ér le az utas a metrószintre a működő mozgólépcsőn, ha közben ugyanúgy lépeget, mint akkor, amikor nem működik?* (*12 pont*)

Megoldás. A megtett út legyen s, ekkor a mozgólépcső sebessége: $v_m = \dfrac{s}{a}$, az utas sebessége: $v_u = \dfrac{s}{b}$. Ha az utas lépeget a mozgólépcsőn, akkor az ideje:

$$\frac{s}{v_m + v_u} = \frac{s}{\frac{s}{a} + \frac{s}{b}} = \frac{ab}{a+b}.$$

Vagyis $\dfrac{ab}{a+b}$ s alatt ér le az utas.

3. *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán:*

$$x + y = \frac{1}{3}, \qquad \cos \pi x \cdot \cos \pi y = \frac{1}{2}.$$ (*14 pont*)

Megoldás. Az első egyenletet π-vel beszorozva, majd mindkét oldal koszinuszát véve, kapjuk:

$$\cos(\pi x + \pi y) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

A megfelelő addíciós-tételt felhasználva adódik:

$$\cos \pi x \cdot \cos \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \frac{1}{2}.$$

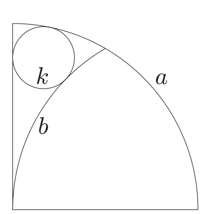
A $\cos \pi x \cdot \cos \pi y = \dfrac{1}{2}$ helyettesítést alkalmazva kapjuk: $\sin \pi x \cdot \sin \pi y = 0$.

A $\sin \pi x = 0$ egyenletből: $\pi x = k\pi$, ahonnan $x_1 = k$, $y_1 = \dfrac{1}{3} - k$, $k \in \mathbb{Z}$.

A $\sin \pi y = 0$ egyenletből: $\pi y = n\pi$, ahonnan $y_2 = n$, $x_2 = \dfrac{1}{3} - n$, $n \in \mathbb{Z}$.

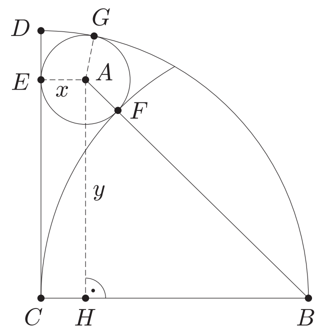
A kapott valós számok valóban megoldásai az egyenletrendszernek.

4. *Az r sugarú negyedkör ívének (az* ábrán *az a körív) egyik végpontjából, mint középpontból rajzoljunk ugyancsak r sugarú körívet (ez a b körív), amely a negyedkör által meghatározott körcikket két részre osztja.*



Számítsuk ki a kisebbik részbe írható k kör sugarát. (*14 pont*)

Megoldás. Az *ábra* jelöléseit használva, tudjuk, hogy: $CB = CG = BF = r$.



A keresett kör sugara $x = AE = CH = AF = AG$, ekkor $AB = r + x$. Legyen $y = AH$, ekkor $AC = HB = r - x$.
Az ACH háromszögben: $y^2 = (r-x)^2 - x^2 = r^2 - 2rx$.
AHB háromszögben: $y^2 = (r+x)^2 - (r-x)^2 = 4rx$.
Az egyenletek összevetéséből: $x = \dfrac{r}{6}$.

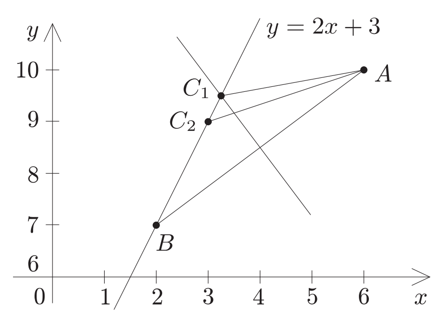
II. rész

5. *Egy háromszög két csúcspontja $A(6;10)$ és $B(2;7)$, a harmadik csúcspont az $y = 2x+3$ egyenletű egyenesen van. Határozzuk meg ezt a csúcspontot úgy, hogy a háromszög*
a) AB alapú egyenlő szárú háromszög legyen;
b) oldalainak négyzetösszege minimális legyen. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az AB felező merőleges egyenesének és a megadott egyenesnek a metszéspontja lesz a harmadik csúcs. Az AB felező merőlegesének egyenlete:

$$4x + 3y = \frac{83}{2}.$$

A keresett metszéspont koordinátái: $C_1\left(\dfrac{13}{4}; \dfrac{19}{2}\right)$.



b) Kiszámítható, hogy $AB = 5$. A C pont koordinátái: $(x; 2x+3)$, ekkor

$$AC = \sqrt{(x-6)^2 + (2x-7)^2}, \quad BC = \sqrt{(x-2)^2 + (2x-4)^2}.$$

A keresett négyzetösszeg:

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 = 25 + (x-6)^2 + (2x-7)^2 + (x-2)^2 + (2x-4)^2 = 10x^2 - 60x + 130.$$

A másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív, ezért minimumhelye van.
A minimumhely: $x_{\min} = \dfrac{60}{2 \cdot 10} = 3$.
Így a háromszög harmadik csúcsának koordinátái: $C_2(3;9)$.

6. *a*) *Az $y = -x^2 + 6x$ és az $y = x^2 - 4x + 8$ egyenletű parabolák által bezárt síkidom területét az $x = p$ egyenletű egyenes felezi. Határozzuk meg p értékét.*

b) Forgassuk meg az $y=-x^2+6x$ és az $y=x^2-4x+8$ egyenletű parabolák által bezárt síkidomot az x tengely körül. Határozzuk meg a keletkező test térfogatát. *(16 pont)*

Megoldás. *a)* Végezzük el a következő átalakításokat:

$$y=-x^2+6x=-(x-3)^2+9,$$
$$y=x^2-4x+8=(x-2)^2+4.$$

Az egyik parabola tengelypontja: $C_1(3;9)$, a másik paraboláé: $C_2(2;4)$.

Belátható, hogy a keletkezett síkidom a C_1C_2 szakasz $F\left(\frac{5}{2};\frac{13}{2}\right)$ felezőpontjára középpontosan szimmetrikus. Vagyis az $x=\frac{5}{2}$ egyenletű egyenes felezi a parabolák által bezárt síkidom területét, azaz $p=\frac{5}{2}$.

b) A két parabola metszéspontját kiszámítjuk: $A(1;5)$, $B(4;8)$. A keresett térfogat:

$$V=\pi\int_1^4\left(-x^2+6x\right)^2dx-\pi\int_1^4\left(x^2-4x+8\right)^2dx=$$

$$=\pi\int_1^4\left(-4x^3+4x^2+64x-64\right)dx=\pi\left[-x^4+\frac{4}{3}x^3+32x^2-64x\right]_1^4=117\pi.$$

7. *A Csoki Gyárban a fogyasztóvédelmi ellenőrzés során megállapították, hogy* 0,95 *valószínűséggel van pontosan az előírt (szabványos)* 40 *szem cukorka a zacskóban, s csak* 0,05 *eséllyel több vagy kevesebb.*

a) Véletlenszerűen kiválasztunk 5 *zacskót. Mekkora a valószínűsége annak, hogy mindegyikben pontosan* 40 *szem cukorka lesz?*

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy legalább két zacskót találunk az öt zacskó között, amelyek nem szabványosak?

c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 100 *zacskó között pontosan* 95 *szabványos lesz?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Minden dobozban 0,95 eséllyel van 40 szem cukorka. Így a megoldás: $0{,}95^5\approx 0{,}774$.

b) Nem kedvező eset, ha mindegyik szabványos, aminek a valószínűsége $0{,}95^5$ (lásd az előző esetet). Nem kedvező az sem, ha pontosan egy nem szabványos zacskót választottunk ki. Ennek valószínűsége: $5\cdot 0{,}95^4\cdot 0{,}05$.

Így a kedvező eset valószínűsége: $1-(0{,}95^5+5\cdot 0{,}95^4\cdot 0{,}05)\approx 0{,}0226$.

c) $\binom{100}{95}\cdot 0{,}95^{95}\cdot 0{,}05^5\approx 0{,}1800$.

8. *Egy cég* 10 *millió Ft-tal támogat egy egyetemet. A pénzösszeget beteszik egy bankba* 7% *éves kamatra. A feltételek alapján* 15 *millió Ft-ot el kell érnie az összegnek, majd az azt követő* 20 *évben ösztöndíjként minden év elején a legjobb* 10 *elsős diáknak kell kiosztani egyenlő arányban úgy, hogy az utolsó kifizetéskor fogyjon el a pénz. Az összeg közben folyamatosan kamatozik, az éves kamat mindvégig* 7%.

a) Hány év múlva kezdik el folyósítani az ösztöndíjakat?

b) Mennyi pénzt kap egy-egy hallgató? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az eltelt idő legyen: n év. Felírható: $10\cdot 1{,}07^n\geq 15$. Ebből kapjuk, hogy

$$n>\frac{\lg 1{,}5}{\lg 1{,}07}\approx 5{,}99.$$

Vagyis 6 év múlva kezdik folyósítani az ösztöndíjat.

b) 7. év elejére felnövekedett összeg: 15 007 304 Ft (legyen a), minden év elején kifizetett összes ösztöndíj: x. Első ösztöndíj kifizetése utáni összeg: $a-x$, év végére: $(a-x)\cdot 1{,}07=1{,}07\,a-1{,}07\,x$. Második ösztöndíj után: $1{,}07\,a-1{,}07\,x-x$, év végére: $1{,}07^2\,a-1{,}07^2\,x-1{,}07\,x$.

A gondolatmenetet folytatva a 20. ösztöndíj kifizetése után:

$$1{,}07^{19}\,a-1{,}07^{19}\,x-1{,}07^{18}\,x-\ldots-x.$$

Ez a feltétel alapján nullával egyenlő. Vagyis: $1{,}07^{19}a-x\big(1{,}07^{19}+1{,}07^{18}+\ldots+1\big)=0$.

A zárójelben álló 20 tagú kifejezés összege:

$$S_{20}=\frac{1{,}07^{20}-1}{1{,}07-1}\approx 40{,}995.$$

Így felírható: $1{,}07^{19}\cdot 15\,007\,304-40{,}995\,x=0$, ebből $x=1\,323\,926$. Így minden évben egy hallgató 132 393 Ft-ot kap.

9. *A, B és C város azonos tengerszint feletti magasságban háromszöget alkot, ahol A és B távolsága* 53 km, *B és C távolsága* 45 km, *A és C távolsága* 28 km. *A és B város közti távolság A-hoz közelebbi harmadoló pontjában egy* 800 m *magas viharjelző tornyot építettek.*

a) Az A városból mekkora szögben látszik a torony teteje?

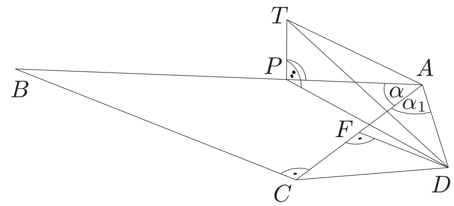
b) A és C várostól egyaránt 20 km*-re lévő D városból légvonalban milyen messze van a torony teteje?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A torony alja legyen P, a teteje pedig T. A TPA derékszögű háromszögben felírható:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{0{,}8}{\frac{53}{3}}=0{,}0453,\quad \alpha\approx 2{,}59^\circ.$$

b) Két elhelyezkedés lehet.

1. eset: Az *1. ábra* jelöléseit használjuk.



1. ábra

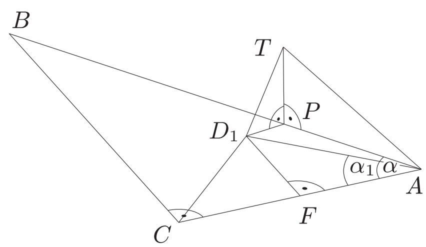
Az AFD háromszögben $\cos\alpha_1 = \dfrac{14}{20}$, azaz $\alpha_1 \approx 45{,}57°$. Mivel $53^2 = 45^2 + 28^2$, azért ABC derékszögű háromszög. Vagyis $\sin\alpha = \dfrac{45}{53}$, azaz $\alpha \approx 58{,}11°$.

A PDA háromszögben felírjuk a koszinusztételt:

$$PD^2 = \left(\frac{53}{3}\right)^2 + 20^2 - 2\cdot\frac{53}{3}\cdot 20\cdot\cos(\alpha+\alpha_1), \quad \text{ebből} \quad PD \approx 29{,}65.$$

A TPD háromszögben felírjuk a Pitagorasz-tételt: $0{,}8^2 + 29{,}65^2 = TD^2$, $TD \approx 29{,}66$.

2. eset: A *2. ábra* jelöléseit használjuk.



2. ábra

$D_1AP = \alpha - \alpha_1 = 12{,}54°$. A PD_1A háromszögben felírjuk a koszinusztételt:

$$PD_1^2 = \left(\frac{53}{3}\right)^2 + 20^2 - 2\cdot\frac{53}{3}\cdot 20\cdot\cos 12{,}54°, \quad \text{ebből} \quad PD_1 = 4{,}72.$$

A TPD_1 derékszögű háromszögben: $TD_1 = 4{,}79$.

A kérdezett távolság vagy kb. 29,66 km vagy kb. 4,79 km.