

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{\log_2(2x - 5)}{\log_2(x^2 - 8)} = \frac{1}{2}. \quad (12 \text{ pont})$$

2. Mekkora annak a 3 cm sugarú kör köré írt egyenlőszárú trapéznek a területe, amelynek hegyesszögei 60° -osak? (12 pont)

3. Ejtőernyősök célba ugrása közben feljegyezték, hogy Berci tíz ugrása közül kilenc alkalommal hány méterre ért földet a középponttól. A feljegyzett adatok méterben: 1, 3, 5, 2, 4, 6, 8, 9, 7. Tíz ugrására vonatkozó adatainak 5 m-től való átlagos abszolút eltérése 2,4 m volt.

a) Állapítsuk meg a hiányzó tizedik adatot.

b) Határozzuk meg a tíz ugrás adataira vonatkozó átlagot, móduszt, mediánt és a szórást. (13 pont)

4. Hány nulla áll a $\binom{100}{50}$ szám végén? (14 pont)

II. rész

5. Egy tetraéder szemközti élei merőlegesek egymásra. Mutassuk meg, hogy létezik olyan gömb, amelyre mind a hat él felezőpontja illeszkedik. (16 pont)

6. Emese havi bére nettó 150 000 Ft. Tegyük fel, hogy ezt a nettó havi bért évente 10%-kal emelik. Hány év múlva vásárolhatja meg béréből a 15 000 000 Ft értékű lakást, ha minden hónapban a fizetésének 60%-át takarítja meg és közben a lakás ára nem változik? (16 pont)

7. Adott a következő két egyenlettel egy-egy görbe: $y = \sqrt{9 - x^2}$ és $y = x^2 - 3$. Határozzuk meg annak a testnek a térfogatát, amelyet e két görbe által meghatározott síkidom y tengely körüli forgatásával kapunk. (16 pont)

8. Egy építkezéshez 3 cég szállítja a betont. Az elsőnek 5, a másodiknak 4, a harmadiknak 6 betonszállító kocsija van. Egy adott napon 12 kocsi betonra van szükség az építkezésen.

Melyik cégtől hány kocsival rendeljenek, hogy a szállítási költség minimális legyen, ha a szállítási költség kocsinként a három cégtől rendre 40 000 Ft, 60 000 Ft és 50 000 Ft? (16 pont)

9. Adott az $ax^2 + bx + c = 0$ valós gyökökkel rendelkező másodfokú egyenlet. Tudjuk, hogy $|a + b + c| < |a|$. Igazoljuk, hogy a másodfokú egyenlet legalább egyik gyöke a $]0; 2[$ intervallumban található. (16 pont)