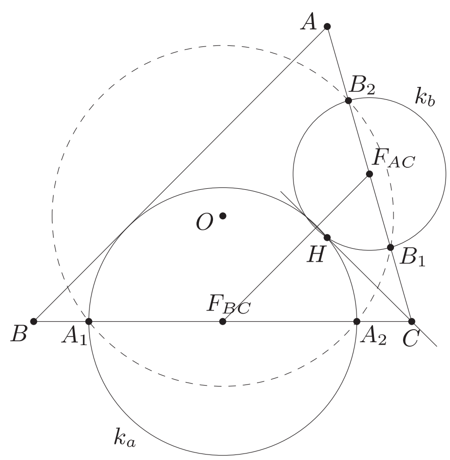
A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

1. *A hegyesszögű ABC háromszög magasságpontja H. Az a H-n átmenő kör, amelynek középpontja a BC szakasz felezőpontja, a BC egyenest A_1-ben és A_2-ben metszi. Hasonlóan, az a H-n átmenő kör, amelynek középpontja a CA szakasz felezőpontja, a CA egyenest B_1-ben és B_2-ben metszi, az a H-n átmenő kör pedig, amelynek középpontja az AB szakasz felezőpontja, az AB egyenest C_1-ben és C_2-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy az A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 pontok egy körön fekszenek.*

Kornis Kristóf megoldása. Legyenek rendre k_a, k_b, k_c az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 átmérőjű körök; F_{AB}, F_{BC}, F_{CA} rendre az AB, BC, CA szakaszok felezőpontjai. Két kör hatványvonala nyilvánvalóan merőleges a középpontjaikat összekötő egyenesre. Emiatt k_a és k_b hatványvonala, és CH is merőleges $F_{BC}F_{AC}$-re, de mivel mindkettőnek eleme H, e két egyenes egybeesik, azaz a C pontnak a k_a és k_b körökre vonatkozó hatványa megegyezik. Vagyis

$$CA_1 \cdot CA_2 = CB_1 \cdot CB_2.$$



Azaz A_1, A_2, B_1, B_2 egy körön fekszenek, melynek középpontja az A_1A_2 és a B_1B_2 szakaszok felezőmerőlegeseinek metszéspontja. Ezek a felezőmerőlegesek viszont éppen egybeesnek az oldalfelező merőlegesekkel, azaz az $A_1A_2B_1B_2$ kör középpontja O, ha O a körülírt kör középpontja, tehát

$$OA_1 = OA_2 = OB_1 = OB_2.$$

Hasonlóan bizonyíthatjuk, hogy

$$\begin{aligned} OA_1 = OA_2 = OC_1 = OC_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow OA_1 = OA_2 = OB_1 = OB_2 = \\ = OC_1 = OC_2. \end{aligned}$$

2. (a) *Mutassuk meg, hogy az*

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

egyenlőtlenség teljesül minden olyan, 1-től különböző x, y, z valós számok esetén, amelyekre $xyz = 1$.

(b) *Mutassuk meg, hogy van végtelen sok olyan, 1-től különböző racionális számokból álló x, y, z számhármas, amelyre $xyz = 1$, és amelyre a fenti egyenlőtlenségben az egyenlőség esete áll fenn.*

Korándi Dániel megoldása. Legyen $a = \dfrac{x}{1-x}$, $b = \dfrac{y}{1-y}$, $c = \dfrac{z}{1-z}$.

$$\begin{aligned} abc = \frac{xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)} = \frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)} = \\ = (a+1)(b+1)(c+1), \end{aligned}$$

azaz

$$(a+1)(b+1)(c+1)-abc=ab+ac+bc+a+b+c+1=0. \tag{1}$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned}(a+b+c+1)^2 &= a^2+b^2+c^2+1+2(ab+ac+bc+a+b+c)=\\ &= a^2+b^2+c^2-1.\end{aligned} \tag{2}$$

Azt kaptuk tehát, hogy $a^2+b^2+c^2-1\geq 0$, a feladat (a) része pedig pont ezt kérdezi.

A (b) rész végtelen sok olyan (x,y,z) racionális számokból álló hármast keres, amire $xyz=1$ és felhasználva (2)-t, $a+b+c+1=0$. (1) szerint $a+b+c+1=0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $ab+ac+bc=0$, ami ekvivalens $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$-val, mivel $abc\neq 0$. (x, y, z egyike sem 0, mivel a szorzat 1. Ekkor viszont a, b, c sem lehet 0.) Visszaírva a, b, c értékét:

$$\frac{1-x}{x}+\frac{1-y}{y}+\frac{1-z}{z}=0.$$

3-at hozzáadva mindkét oldalhoz:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=yz+xz+xz=3.$$

Azaz olyan számhármasokat keresünk, amire $xyz=1$ és $xy+xz+yz=3$, valamint $x,y,z\neq 1$.

Írjunk be x helyébe $\frac{1}{yz}$-t. $\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+yz=3$ racionális megoldásait keressük. Szorozva yz-vel egy másodfokú egyenletet kapunk y-ra:

$$z^2y^2+(1-3z)y+z=0.$$

Olyan racionális z-t keresünk, amire ennek az egyenletnek a gyökei is racionálisak, ehhez az kell, hogy a diszkrimináns egy racionális szám négyzete legyen:

$$\begin{aligned}D&=(1-3z)^2-4z^3=-4z^3+9z^2-6z+1=(z-1)(-4z^2+5z-1)=\\&=(z-1)^2(1-4z).\end{aligned}$$

Mivel y racionális, azért $(z-1)^2$ egy racionális szám négyzete, így szükséges, hogy $1-4z$ is egy racionális szám négyzete legyen. Ehhez viszont tetszőleges racionális q-ra elég $z=\frac{1-q^2}{4}$-et választani. Ekkor y is racionális lesz, s így $x=\frac{1}{yz}$ is. Tehát van végtelen sok racionális megoldás. Ezzel igazoltuk a (b) részt is.

3. *Bizonyítsuk be, hogy van végtelen sok olyan n pozitív egész szám, amelyre (n^2+1)-nek van olyan prímosztója, ami nagyobb, mint $2n+\sqrt{2n}$.*

Lovász László Miklós megoldása. A bizonyítandó állítás következik az alábbi állításból:

Végtelen sok p prím van, amihez létezik olyan n, hogy

$$2n+\sqrt{2n}<p, \quad \textit{és} \quad p\mid n^2+1.$$

Ha ugyanis csak véges sok megfelelő n lenne, akkor, mivel (n^2+1)-nek véges sok különböző prímosztója van, csak véges sok megfelelő p lenne.

Ismert, hogy végtelen sok $p=4k+1$ alakú prím van, és hogy ezekre létezik olyan n, amire $p\mid n^2+1$. Legyen $p>20$ egy $4k+1$ alakú prím. Nyilván létezik ekkor ilyen n a $(0,p)$ intervallumban[1]. Ha $n>\frac{p}{2}$, akkor $p-n<\frac{p}{2}$, így

$$(p-n)^2+1\equiv n^2+1\equiv 0 \pmod{p}.$$

Tehát van megfelelő pozitív egész n, amire $n<\frac{p}{2}$, vagyis $2n<p$.

Legyen $n=\frac{p-k}{2}$. Mivel p páratlan, $k>0$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{p-k}{2}\right)^2+1&\equiv 0 \pmod{p},\\(p-k)^2+4&\equiv 0 \pmod{p},\\k^2+4&\equiv 0 \pmod{p}.\end{aligned}$$

[1] n p szerinti osztási maradéka megfelelő lesz.

$k^2>0,\ 4>0\ \Rightarrow\ k^2+4>0$, tehát $k^2+4\ge p$, amiből $k\ge\sqrt{p-4}$. Ekkor tehát

$$n=\frac{p-k}{2}\le\frac{p-\sqrt{p-4}}{2},$$

vagyis

$$2n\le p-\sqrt{p-4},\quad 2n+\sqrt{p-4}\le p,\quad p-4\ge 2n+\sqrt{p-4}-4.$$

Mivel $p>20$, $\sqrt{p-4}>4$, amiből $p-4>2n\ \Rightarrow\ \sqrt{p-4}>\sqrt{2n}$. Azt kaptuk tehát, hogy

$$p\ge\sqrt{p-4}+2n>\sqrt{2n}+2n.$$

Tehát ha p elég nagy, létezik hozzá megfelelő n, így mivel végtelen sok $4k+1$ alakú prím van, végtelen sok megfelelő p van, és ezért végtelen sok megfelelő n van.

4. *Határozzuk meg az összes olyan $f\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$ függvényt (f tehát a pozitív valós számok halmazából a pozitív valós számok halmazába képez), amelyre*

$$\frac{\big(f(w)\big)^2+\big(f(x)\big)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

teljesül, valahányszor w, x, y, z olyan pozitív valós számok, amelyekre fennáll: $wx=yz$.

Kiss Viktor megoldása. Helyettesítsük be $w=x=y=z=1$-et. Teljesül az $wx=yz$ feltétel, tehát

$$\frac{2f^2(1)}{2f(1)}=\frac{1^2+1^2}{1^2+1^2}=1.$$

$f(1)>0$, tehát egyszerűsíthetünk vele, kapjuk, hogy $f(1)=1$. Ezután helyettesítsünk be $w=1$, $x=a$, $y=z=\sqrt{a}$-t, ahol a tetszőleges pozitív valós szám. Teljesül, hogy $wx=yz$, tehát

$$\frac{f^2(1)+f^2(a)}{2f(a)}=\frac{1+f^2(a)}{2f(a)}=\frac{1+a^2}{2a}.$$

$f(a)$ és a is pozitív, tehát szorozhatunk velük, kapjuk, hogy

$$a\big(1+f^2(a)\big)=f(a)(1+a^2),$$

azaz

$$f^2(a)\cdot a-f(a)(1+a^2)+a=0.$$

Ez másodfokú egyenlet $f(a)$-ra, megoldásai a következők:

$$f(a)=\frac{1+a^2\pm\sqrt{(1+a^2)^2-4a^2}}{2a}=\frac{1+a^2\pm\sqrt{1+a^4-2a^2}}{2a}.$$

Ha $a\ge 1$, akkor

$$f(a)=\frac{1+a^2\pm\sqrt{(a^2-1)^2}}{2a}=\frac{1+a^2\pm(a^2-1)}{2a}=a\quad\text{vagy}\quad\frac{1}{a}.$$

Ha $a<1$, akkor

$$f(a)=\frac{1+a^2\pm\sqrt{(1-a^2)^2}}{2a}=\frac{1+a^2\pm(1-a^2)}{2a}=a\quad\text{vagy}\quad\frac{1}{a}.$$

Tehát megkaptuk, hogy $f(a)$ értéke tetszőleges a-ra a vagy $\frac{1}{a}$. Tegyük fel, hogy létezik $a,b\ne 1$, hogy

$$f(a)=a\quad\text{és}\quad f(b)=\frac{1}{b}.$$

Helyettesítsünk be $w=a$, $x=b$, $y=1$, $z=ab$-t.

I. eset: $f(a^2b^2)=a^2b^2$. Ekkor

$$\frac{f^2(a)+f^2(b)}{f(1^2)+f(a^2b^2)}=\frac{a^2+\frac{1}{b^2}}{1+a^2b^2}=\frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2},$$

ami nem lehet, hiszen $b\ne 1$ és pozitív, tehát $b^2\ne\frac{1}{b^2}$.

II. eset: $f(a^2b^2) = \dfrac{1}{a^2b^2}$. Ekkor

$$\frac{f^2(a)+f^2(b)}{f(1^2)+f(a^2b^2)} = \frac{a^2+\frac{1}{b^2}}{1+\frac{1}{a^2b^2}} = \frac{a^4b^2+a^2}{a^2b^2+1} = \frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2},$$

ami csak akkor teljesülhetne, ha $a^4 = 1$ teljesülne (hiszen a pozitív), de ez nem igaz. Tehát megkaptuk, hogy vagy minden $a \neq 1$-re $f(a) = a$, vagy minden $a \neq 1$-re $f(a) = \dfrac{1}{a}$ (mivel $f(1) = 1$, azért a két szóba jövő függvény az $f(x) = x$ és az $f(x) = \dfrac{1}{x}$). Most belátjuk, hogy mindkét függvény teljesíti a feladat feltételeit. Ha az $f(x) = x$-et tekintjük, akkor

$$\frac{f^2(w)+f^2(x)}{f(y^2)+f(z^2)} = \frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

triviálisan teljesül.

Ha $f(x) = \dfrac{1}{x}$, akkor

$$\frac{f^2(w)+f^2(x)}{f(y^2)+f(z^2)} = \frac{\frac{1}{w^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}} \qquad \Big| \cdot \frac{w^2x^2}{y^2z^2}$$

$$\frac{x^2y^2z^2+w^2y^2z^2}{z^2x^2w^2+y^2x^2w^2} = \frac{(x^2+w^2)y^2z^2}{(y^2+z^2)x^2w^2} = \frac{x^2+w^2}{y^2+z^2} \qquad \text{(hiszen } wx = yz\text{)}.$$

Tehát csak az $f(x) = x$ és $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvények teljesítik a feladat feltételeit, és ezek valóban teljesítik azokat.

5. *Legyenek n és k pozitív egészek, amelyekre $k \geq n$ és $k-n$ páros szám. Adott $2n$ lámpa, amelyek 1-től $2n$-ig vannak számozva, és amelyek mindegyike* be*(kapcsolt) vagy* ki*(kapcsolt) állapotban lehet. Kezdetben mindegyik lámpa ki állapotban van.* Lépések *egy sorozatát tekintjük: egy lépés abból áll, hogy valamelyik lámpa állapotát megváltoztatjuk (be-ről ki-re vagy ki-ről be-re).*

Legyen N az olyan, k lépésből álló sorozatok száma, amelyek eredményeképpen az 1-től n-ig számozott lámpák bekapcsolt, az $(n+1)$-től $2n$-ig számozott lámpák pedig kikapcsolt állapotban lesznek.

Legyen M az olyan, k lépésből álló sorozatok száma, amelyek eredményeképpen az 1-től n-ig számozott lámpák bekapcsolt, az $(n+1)$-től $2n$-ig számozott lámpák pedig kikapcsolt állapotban lesznek, és a sorozatban az $(n+1)$-től $2n$-ig számozott lámpák semelyikét sem kapcsoljuk be semmikor.

Határozzuk meg az N/M hányados értékét.

Eisenberger András megoldása. $N/M = 2^{k-n}$.

Alkossunk egy megfeleltetést úgy, hogy minden M-beli sorozatot 2^{k-n} db N-belinek feleltetünk meg úgy, hogy minden N-belit pontosan egyszer kapjunk meg.

Vegyünk egy M-beli m sorozatot. (Ebben a sorozatban tehát 1-től n-ig minden lámpát páratlan sokszor kapcsoltunk át.) Induljunk el sorban a sorozat lépésein. Amikor olyan lámpát kapcsolnánk át (legyen az i. lámpa), amit m szerint még egy későbbi lépésben is kapcsolunk majd, akkor kétféleképp folytathatjuk: az i. lámpát vagy az $(n+i)$. lámpát kapcsoljuk, ezután tovább megyünk a következő lépésre. Ha nem ilyen a lépés, tehát m-ben már többször nem kapcsolnánk ezt a lámpát, akkor megnézzük, hogy eddig hányszor kapcsoltuk az i. lámpát. Ha páros sokszor, akkor most is az i. lámpát kapcsoljuk, ha páratlan sokszor, akkor az $(n+i)$. lámpát (itt tehát nincs választásunk). Ezzel a módszerrel a végén az i. lámpa biztosan be lesz kapcsolva, az $(n+i)$. pedig biztosan ki, mivel az eredeti sorozatban és most is az i. páratlan sokszor szerepelt, így most az $(n+i)$. lámpát biztosan páros sokszor kapcsoltuk. Mindamellett az eredeti sorozathoz hasonlóan k lépést hajtottunk végre, ezért az így kapott sorozat N eleme.

A sorozat alkotása során az első n lámpát legalább egyszer kapcsoltuk, így n olyan lépés volt, amikor valamelyiket utoljára kapcsoltuk, tehát a maradék $(k-n)$ lépés volt az a fajta, ahol választásunk volt. Vagyis az M minden eleméhez az N-nek 2^{k-n} elemét rendeltük. Már csak azt kell megmutatnunk, hogy N minden elemét pontosan egyszer kaptuk meg. Ez azért igaz, mert ha veszünk egy sorozatot N-ből, és minden olyan kapcsolás helyett, ahol az $(n+i)$. lámpát kapcsolnánk, az i. lámpát kapcsoljuk, akkor megkapjuk M-nek azt az egyetlen sorozatát, amiből ezt az N-beli sorozatot kaphatjuk. És az is egyértelmű, hogy melyik döntésnél hogyan kell dönteni ahhoz, hogy ezt kaphassuk.

6. *Legyen $ABCD$ konvex négyszög, amelyben $BA \neq BC$. Jelölje ω_1, ill. ω_2 az ABC, ill. ADC háromszögek beírt körét. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan ω kör, amelyik érinti a BA félegyenes A-n túli részét és a BC félegyenes C-n túli részét, továbbá érinti az AD és CD egyeneseket. Bizonyítsuk be, hogy az ω_1 és ω_2 körök közös külső érintői az ω körön metszik egymást.*

Tomon István megoldása. Lemma: *Ha egy $ABCD$ négyszögnél létezik az ω kör, akkor*

$$AB + AD = CB + CD.$$

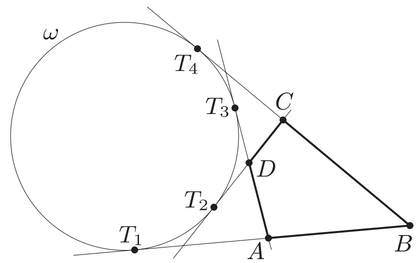
Bizonyítás: Legyenek az ω kör érintési pontjai az oldalegyenesekkel az *ábrán* látható módon T_1, T_2, T_3, T_4. Ekkor felhasználva, hogy egy adott pontból a körhöz húzott érintőknek hossza megegyezik, azt kapjuk, hogy

$$BT_4 = BT_1. \tag{1}$$

Ezen kívül a következő egyenlőséglánc teljesül:

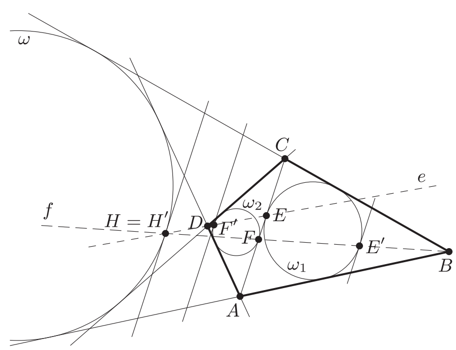
$$\begin{aligned} BT_4 &= BC + CT_4 = BC + CT_2 = BC + CD + DT_2 = BC + CD + DT_3 = \\ &= BC + CD + AT_3 - AD = BC + CD + AT_1 - AD = \\ &= BC + CD + BT_1 - AD - AB. \end{aligned}$$

Ezt összevetve (1)-gyel azt kapjuk, hogy $BC + CD = AB + AD$, s ezzel a Lemmát bebizonyítottuk.



Most térjünk rá a feladat bizonyítására. Húzzuk meg az ω_1 kör AC-től különböző, AC-vel párhuzamos érintőjét, érintse ez ω_1-et az E' pontban. ω_1 és AC érintési pontja legyen E, ω_2 és AC érintési pontja F, ezen kívül húzzuk meg az ω körnek az AC-vel párhuzamos érintőjét, amely elválasztja B-t ω-tól, érintse ez ω-t a H pontban.

Az ismert összefüggés alapján $CE = \dfrac{-AB + BC + CA}{2}$ és $AF = \dfrac{-CD + AD + AC}{2}$, tehát a Lemma alapján $CE = AF$. Ez azt jelenti, hogy F az ABC háromszög AC oldalához írt körnek az érintési pontja, tehát ha az AC-vel E'-n át húzott egyenest B-ből AC-be nyújtjuk, akkor E' az F-be kerül, így B, E', F egy egyenesen vannak, tehát B, E', F, H egy egyenesen vannak.



Legyen H' az ω_1 és ω_2 közös külső érintőinek metszéspontja. Ekkor a H'-ből az ω_2-t az ω_1 körbe nagyíthatjuk, s ekkor az F pont az E' pontba megy át, így H', F, E' egy egyenesen vannak. Vagyis B, E', F, H, H' egy egyenesen vannak, azaz nézzük csak azt, hogy B, F, H, H' egy f egyenesen vannak. Hasonlóan, ha D-t tekintjük a nyújtás középpontjának, akkor H, D, F', E egy egyenesen vannak. Tekintsük újra a H'-ből az ω_2 nagyítását ω_1-be. Ekkor az F' pont E-be megy át, így H', F', E egy egyenesen vannak. Tehát H', H, D, E egy e egyenesen vannak. A $BA \neq BC$ feltétel biztosítja, hogy a BF egyenes nem azonos a DE egyenessel. Ezért az e és az f egyenesek különbözők, tehát csak egyetlen közös pontjuk van. Így szükségképpen $H = H'$, s mivel H rajta van a körön, így H' is, s ezzel az állítást bebizonyítottuk.