

Első nap

1. feladat. A hegyesszögű ABC háromszög magasságpontja H . Az a H -n átmenő kör, amelynek középpontja a BC szakasz felezőpontja, a BC egyenest A_1 -ben és A_2 -ben metszi. Hasonlóan, az a H -n átmenő kör, amelynek középpontja a CA szakasz felezőpontja, a CA egyenest B_1 -ben és B_2 -ben metszi, az a H -n átmenő kör pedig, amelynek középpontja az AB szakasz felezőpontja, az AB egyenest C_1 -ben és C_2 -ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy az $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ pontok egy körön fekszenek.

2. feladat. (a) Mutassuk meg, hogy az

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

egyenlőtlenség teljesül minden olyan, 1-től különböző x, y, z valós számok esetén, amelyekre $xyz = 1$.

(b) Mutassuk meg, hogy van végtelen sok olyan, 1-től különböző racionális számokból álló x, y, z számhármass, amelyre $xyz = 1$, és amelyre a fenti egyenlőtlenségben az egyenlőség esete áll fenn.

3. feladat. Bizonyítsuk be, hogy van végtelen sok olyan n pozitív egész szám, amelyre $(n^2 + 1)$ -nek van olyan prímosztója, ami nagyobb, mint $2n + \sqrt{2n}$.

Második nap

4. feladat. Határozzuk meg az összes olyan $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ függvényt (f tehát a pozitív valós számok halmazából a pozitív valós számok halmazába képez), amelyre

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

teljesül, valahányszor w, x, y, z olyan pozitív valós számok, amelyekre fennáll: $wx = yz$.

5. feladat. Legyenek n és k pozitív egészek, amelyekre $k \geq n$ és $k - n$ páros szám. Adott $2n$ lámpa, amelyek 1-től $2n$ -ig vannak számozva, és amelyek mindegyike *be*(kapcsolt) vagy *ki*(kapcsolt) állapotban lehet. Kezdetben mindegyik lámpa ki állapotban van. *Lépések* egy sorozatát tekintjük: egy lépés abból áll, hogy valamelyik lámpa állapotát megváltoztatjuk (be-ről ki-re vagy ki-ről be-re).

Legyen N az olyan, k lépésből álló sorozatok száma, amelyek eredményeképpen az 1-től n -ig számozott lámpák bekapcsolt, az $(n+1)$ -től $2n$ -ig számozott lámpák pedig kikapcsolt állapotban lesznek.

Legyen M az olyan, k lépésből álló sorozatok száma, amelyek eredményeképpen az 1-től n -ig számozott lámpák bekapcsolt, az $(n+1)$ -től $2n$ -ig számozott lámpák pedig kikapcsolt állapotban lesznek, és a sorozatban az $(n+1)$ -től $2n$ -ig számozott lámpák semelyikét sem kapcsoljuk be semmikor.

Határozzuk meg az N/M hányados értékét.

6. feladat. Legyen $ABCD$ konvex négyszög, amelyben $|BA| \neq |BC|$. Jelölje ω_1 , ill. ω_2 az ABC , ill. ADC háromszögek beírt körét. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan ω kör, amelyik érinti a BA félegyenes A -n túli részét és a BC félegyenes C -n túli részét, továbbá érinti az AD és CD egyeneseket. Bizonyítsuk be, hogy az ω_1 és ω_2 körök közös külső érintői az ω körön metszik egymást.

¹ Az olimpia honlapja: <http://www.imo-2008.es/>.