

Egy merev test valamely rögzített tengely körüli forgómozgásának alapegyenlete:

$$M = \Theta \beta,$$

ahol  $M$  a testre ható külső erők forgatónyomatéka az adott tengelyre vonatkoztatva,  $\beta$  a test szöggyorsulása,  $\Theta$  pedig a testnek az adott tengelyre vonatkoztatott *tehetetlenségi nyomatéka*. Látható, hogy  $\Theta$  hasonló szerepet tölt be a forgómozgás leírásánál, mint az  $F = ma$  mozgásegyenletben a tömeg. Az alábbiakban néhány, a tehetetlenségi nyomatékkal kapcsolatos tételt mutatunk be, és igazoljuk is azokat.

Egy adott tengelytől  $r$  távolságra lévő  $m$  tömegű tömegpont tehetetlenségi nyomatéka definíció szerint

$$((1)) \quad \Theta = mr^2.$$

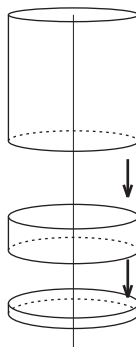
$N$  darab tömegpontból álló rendszer tehetetlenségi nyomatéka az egyes tömegpontok tehetetlenségi nyomatékainak az *összege*:

$$((2)) \quad \Theta = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_N r_N^2 = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2,$$

ahol  $m_i$  az  $i$ -edik tömegpont tömege,  $r_i$  pedig a tengelytől mért távolsága.

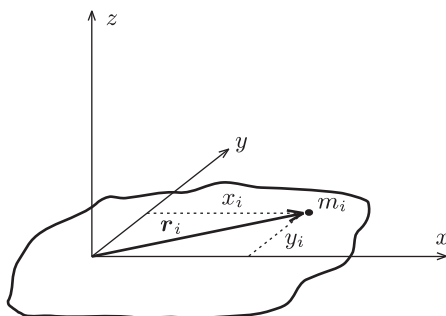
A (2) egyenletből következik, hogy több testből álló rendszer tehetetlenségi nyomatéka megegyezik az egyes testek tehetetlenségi nyomatékainak az összegével. Ez az ún. *addíciós tétel*.

Ugyancsak a (2) összefüggésből következő tulajdonság, hogy egy rendszer tehetetlenségi nyomatéka nem változik, ha annak pontjait a tengellyel párhuzamosan eltoljuk, és akkor sem változik meg a tehetetlenségi nyomaték, ha egy testet a kérdéses tengellyel párhuzamosan összelapítunk vagy megnyújtunk. Ez a megállapítás *lapítási tétel* néven ismert. Eszerint például egy homogén *hengernek*, egy lapos *korongnak* és egy (elméletileg végtelen vékony) *körlapnak* a körlapjukra merőleges tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka megegyezik, ha a testek tömege is és a sugara is ugyanakkora (*1. ábra*).



1. ábra

Ha egy lapos (síkbelinek tekinthető) test tehetetlenségi nyomatékát vizsgáljuk, érdekes megállapításra juthatunk. Tekintsük a testnek egy tetszőleges pontját! Vegyünk fel egy derékszögű koordináta-rendszert, melynek origója ez a kiválasztott pont,  $z$  tengelye merőleges a lapos test síkjára, a másik két tengely pedig a *2. ábrán* látható módon a síkban fekszik.



2. ábra

A  $z$  tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték az ábra jelöléseit és a (2) definíciót használva

$$((3)) \quad \Theta_z = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2,$$

és mivel  $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ , fennáll

$$((4)) \quad \Theta_z = \sum_{i=1}^N m_i x_i^2 + \sum_{i=1}^N m_i y_i^2.$$

Vegyük észre, hogy (4) jobb oldalának első tagja nem más, mint az  $y$  tengelyre vonatkozó  $\Theta_y = \sum_{i=1}^N m_i x_i^2$ , második tagja

pedig az  $x$  tengelyre vonatkozó  $\Theta_x = \sum_{i=1}^N m_i y_i^2$  tehetetlenségi nyomaték, hiszen az összegekben az egyes tömegpontok tömegének és az adott tengelytől mért távolság négyzetének szorzata szerepel. Lapos testekre érvényes tehát a

$$((5)) \quad \Theta_z = \Theta_x + \Theta_y$$

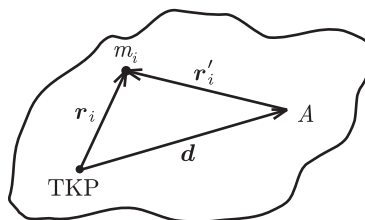
összefüggés, azaz egy lapos testnek a lapjára merőleges, egyébként tetszőleges tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka megegyezik a tengelyt metsző, két egymásra merőleges, a síklapban fekvő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték összegével. Ezt a tételt *poláris-ekvatoriális tételnek* hívjuk.

Végül igazoljuk a – KöMaL olvasói közül bizonyára sokaknak ismerős – *Steiner-tételt*, miszerint a tömegközépponton (TKP) átmenő tengellyel párhuzamos, attól  $d$  távolságra lévő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta = \Theta^{(\text{TKP})} + md^2,$$

ahol  $m$  a test tömege,  $\Theta^{(\text{TKP})}$  a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték.

Tekintsünk először egy lapos testet! A tömegközépponton és az  $A$  ponton átmenő tengelyek legyenek merőlegesek a test síkjára (lásd a 3. ábrát!)



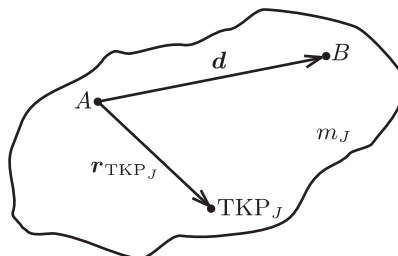
3. ábra

A testet kicsiny tömegpontokra bontva az  $i$ -edik tömegpontba mutató  $\mathbf{r}_i$  és  $\mathbf{r}'_i$  vektorok közötti kapcsolat  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{d}$ . A tengelyek távolsága  $|\mathbf{d}| = d$ . Az  $A$  ponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték

$$((6)) \quad \begin{aligned} \Theta^{(A)} &= \sum_{i=1}^N m_i r_i'^2 = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{d})^2 = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 - 2\mathbf{d} \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \right) + md^2 = \\ &= \Theta^{(\text{TKP})} + md^2, \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy a tömegközéppont definíciója szerint  $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = 0$ . Ezzel lapos testre beláttuk a Steiner-tételt.

Vizsgáljunk most egy tetszőleges (tehát nem lapos) merev testet! Osszuk fel a szóban forgó testet  $M$  darab lapos szeletre olyan síkokkal, amelyek merőlegesek egy – a TKP-n átmenő – tetszőlegesen kiválasztott tengelyre. A 4. ábrán a  $J$ -edik ilyen szelet látható, jelöljük ennek tömegét  $m_J$ -vel. (A nagybetűs index használata arra utal, hogy itt most nem tömegpontokról, hanem lapos szeletekről beszélünk.)



4. ábra

A merev test tömegközéppontján átmenő tengely a lapos szelet síkjának  $A$  pontján, egy vele párhuzamos másik tengely pedig a  $B$  pontján halad keresztül. A 4. ábrán a vizsgált szelet tömegközéppontját ( $\text{TKP}_J$ ) is feltüntettük. A szelet  $A$  és  $B$  pontján, valamint saját tömegközéppontján átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékának kapcsolata a (6) összefüggés és a 4. ábra alapján:

$$(7) \quad \Theta_J^{(A)} = \Theta_J^{(\text{TKP})} + m_J r_{\text{TKP}_J}^2,$$

$$(8) \quad \begin{aligned} \Theta_J^{(B)} &= \Theta_J^{(\text{TKP})} + m_J (\mathbf{r}_{\text{TKP}_J} - \mathbf{d})^2 = \\ &= \Theta_J^{(\text{TKP})} + m_J d^2 - 2\mathbf{d}(m_J \mathbf{r}_{\text{TKP}_J}) + m_J r_{\text{TKP}_J}^2. \end{aligned}$$

A (7) és (8) összefüggésekből

$$((9)) \quad \Theta_J^{(B)} = \Theta_J^{(A)} + m_J d^2 - 2\mathbf{d}(m_J \mathbf{r}_{\text{TKP}_J})$$

adódik. Az addíciós tétel szerint a merev test tömegközéppontján átmenő tengelyre, illetve egy azzal párhuzamos, tőle  $d$  távolságra levő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok közötti összefüggés:

$$((10)) \quad \Theta^{(B)} = \sum_{J=1}^M \Theta_J^{(B)} = \sum_{J=1}^M [\Theta_J^{(A)} + m_J d^2 - 2\mathbf{d}(m_J \mathbf{r}_{\text{TKP}_J})] = \Theta^{(A)} + md^2.$$

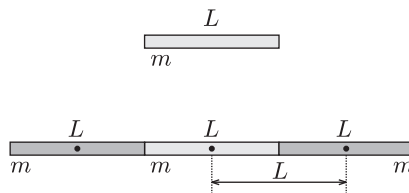
(Ismét kihasználtuk, hogy a tömegközéppont definíciója szerint  $\sum_{J=1}^M m_J \mathbf{r}_{\text{TKP}_J} = 0$ .) Ezzel a Steiner-tételt általánosan igazoltuk.

Az előző tételek ismerete lehetővé teszi, hogy bizonyos esetekben elemi módszerekkel is meghatározhassuk egy-egy test tehetetlenségi nyomatékát.

**1. példa.** Határozzuk meg egy  $m$  tömegű,  $L$  hosszúságú, homogén tömegeloszlású vékony rúd tehetetlenségi nyomatékát a hossztengelyére merőleges tömegközépponti tengelyre!

**Megoldás.** Jelöljük a kérdéses tehetetlenségi nyomatékot  $\Theta_{m,L}$ -l, ahol az index a rúd tömegére és a hosszára utal. Hosszabbítsuk meg gondolatban a vizsgált rudat oly módon, hogy mindkét végéhez egy-egy, az eredetivel megegyező tömegű és hosszúságú rudat erősítsünk (5. ábra). Ekkor egy  $3m$  tömegű és  $3L$  hosszúságú testet kapunk. Ennek tehetetlenségi nyomatéka az addíciós tétel és a Steiner-tétel felhasználásával így számítható:

$$((11)) \quad \Theta_{3m,3L} = \Theta_{m,L} + 2(\Theta_{m,L} + mL^2).$$



5. ábra

Másrészt viszont (2) alapján nyilván igaz, hogy

$$\Theta_{3m,3L} = 3 \cdot \Theta_{m,3L} \quad \text{és} \quad \Theta_{m,3L} = 3^2 \cdot \Theta_{m,L},$$

vagyis

$$((12)) \quad \Theta_{3m,3L} = 27 \cdot \Theta_{m,L}.$$

(11) és (12) összevetéséből a vékony rúd tehetetlenségi nyomatékára

$$((13)) \quad \Theta_{m,L} = \frac{1}{12} mL^2$$

adódik.

**2. példa.** Határozzuk meg egy  $m$  tömegű,  $R$  sugarú, homogén tömegeloszlású vékonyfalú gömbhéj (például egy pingponglabda) tehetetlenségi nyomatékát a középpontján átmenő tengelyre! (Felhasználhatjuk, hogy egy homogén, tömör gömb tehetetlenségi nyomatéka  $\frac{2}{5}mR^2$ .)

**Megoldás.** Jelöljük a gömbhéj vastagságát  $h$ -val ( $h \ll R$ ), és számítsuk ki a gömbhéj sűrűségét! Mivel a térfogata

$$V = \frac{4\pi}{3}R^3 - \frac{4\pi}{3}(R-h)^3 = 4\pi R^2h \left(1 - \frac{h}{R} + \frac{h^2}{3R^2}\right) \approx 4\pi R^2h,$$

a sűrűség jó közelítéssel

$$(14) \quad \varrho = \frac{m}{4\pi R^2h}.$$

A gömbhéj keresett  $\Theta$  tehetetlenségi nyomatékát az addíciós tétel felhasználásával határozhatjuk meg. A gömbhéj és egy  $(R-h)$  sugarú tömör gömb együtt egy  $R$  sugarú tömör gömböt képez, így fennáll

$$\Theta + \frac{2}{5}(R-h)^2 \cdot \frac{4\pi}{3}(R-h)^3 \varrho = \frac{2}{5}R^2 \cdot \frac{4\pi}{3}R^3 \varrho,$$

ahonnan (14) felhasználásával és algebrai átalakítások után kapjuk:

$$(15) \quad \Theta = \frac{8\pi}{15}\varrho[R^5 - (R-h)^5] \approx \frac{8\pi}{15} \cdot \frac{m}{4\pi R^2h} \cdot 5R^4h = \frac{2}{3}mR^2.$$

**3. példa.** Határozzuk meg egy  $m$  tömegű,  $R$  külső és  $r$  belső sugarú,  $L$  hosszúságú, homogén tömegeloszlású egyenes cső tehetetlenségi nyomatékát a hossz tengelyére merőleges tömegközépponti tengelyre! (Felhasználhatjuk az 1. példa végeredményét, valamint azt, hogy egy homogén, tömör rúd tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére vonatkoztatva  $mR^2/2$ .)

**Megoldás.** Szeleteljük fel a testet a forgástengelyére merőlegesen sok vékony,  $\Delta z$  vastagságú, külön-külön már laposnak tekinthető „körgyűrűre”. Egy-egy ilyen darabka tömege

$$(16) \quad \Delta m = m \frac{\Delta z}{L},$$

a síkjára merőleges, tömegközépponti tengelyre vonatkozó  $\Theta_1$  tehetetlenségi nyomatéka pedig – az addíciós tétel értelmében – egy  $R$  és egy  $r$  sugarú tömör korong tehetetlenségi nyomatékának különbségeként áll elő. Mivel a test sűrűsége

$$(17) \quad \varrho = \frac{m}{\pi L(R^2 - r^2)},$$

a körgyűrű-szelet tehetetlenségi nyomatéka

$$(18) \quad \Theta_1 = \frac{1}{2}(\varrho R^2 \pi \Delta z)R^2 - \frac{1}{2}(\varrho r^2 \pi \Delta z)r^2.$$

Ez (16) és (17) felhasználásával így is felírható:

$$(19) \quad \Theta_1 = \frac{1}{2}\Delta m(R^2 + r^2).$$

Minket azonban nem ez (a lapos test síkjára merőleges tengelyhez tartozó), hanem a test *síkjában fekvő* tömegközépponti tengelyre vonatkozó  $\Theta_2$  tehetetlenségi nyomaték érdekel. A poláris-ekvatoriális tétel és a forgási szimmetria felhasználásával  $\Theta_1 = \Theta_2 + \Theta_2$ , azaz

$$(20) \quad \Theta_2 = \frac{\Theta_1}{2} = \frac{1}{4}\Delta m(R^2 + r^2).$$

Az egyes körgyűrű-szeletek tehetetlenségi nyomatéka a cső középpontján átmenő (a szeletke síkjától  $z$  távolságra fekvő) tengelyre vonatkoztatva a Steiner-tétel értelmében

$$(21) \quad \Delta\Theta = \frac{1}{4}\Delta m(R^2 + r^2) + \Delta m z^2.$$

Az egész cső tehetetlenségi nyomatéka a kérdéses tengelyre az addíciós tétel alkalmazásával kapható meg:

$$(22) \quad \Theta = \sum \Delta\Theta = \sum \frac{1}{4}\Delta m(R^2 + r^2) + \sum \Delta m z^2.$$

A jobb oldal utolsó tagja nem más, mint egy  $m$  tömegű,  $L$  hosszúságú rúd tehetetlenségi nyomatéka a rúdra merőleges tömegközépponti tengelyre, ami a (13) összefüggés szerint  $\frac{1}{12}mL^2$ . Végeredményünk tehát:

$$(23) \quad \Theta = \frac{1}{4}m(R^2 + r^2) + \frac{1}{12}mL^2.$$