I. rész

1. *a) Egy 1600 kötetes iskolai könyvtár magyar és angol nyelvű könyvekből áll. Magyar nyelvű a könyvek p%-a. Ezen könyvek p%-a angol fordításban is megtalálható a könyvtárban. Az eredetileg angol nyelven írt könyvek száma 64. Határozza meg a magyar és az angol nyelvű könyvek arányát.*

b) Év végén a beszerzéseket követő felújítás során az összes könyvet egyforma dobozokba pakoljuk. Ha dobozonként 25 könyvet teszünk, akkor 17 könyv kimarad, ha 27 könyvet csomagolunk, akkor négy doboz üresen marad és az utolsónak megrakott dobozba is fér még 5 könyv. Hány dobozunk volt a pakoláshoz? Hány könyvvel gyarapodott a könyvtár állománya az év végére?

Megoldás. *a)* Magyar nyelvű könyv $1600 \cdot \frac{p}{100}$, abból angolra fordított $1600 \cdot \frac{p^2}{10\,000}$. Ha ehhez hozzávesszük az eredetileg angol nyelven írottakat, akkor a teljes angol nyelvű állományt kapjuk, ami $(100-p)$%-nak felel meg. Így az egyenlet:

$$1600 \cdot \frac{p^2}{10\,000} + 64 = 1600 \cdot \frac{100-p}{100},$$

amiből adódik, hogy $p^2 + 100p - 9600 = 0$. Ennek egyetlen pozitív megoldása a $p = 60$.

Magyar nyelvű könyv 960, angol nyelvű 640 db van, így az arányuk $3:2$.

b) A dobozok számát d-vel jelölve, a könyvek számát felírhatjuk $25d+17$, illetve $27(d-5)+22$ alakban. A megfelelő egyenlőség felírásából $d = 65$ adódik.

Visszahelyettesítve 1642 könyvet kapunk, vagyis 42 könyvvel gyarapodott az állomány.

2. *Az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű körhöz a 3 abszcisszájú pontjaiban érintőket rajzolunk.*

a) Írjuk fel az érintők egyenletét.

b) Határozzuk meg az érintők hajlásszögét.

Megoldás. *a)* Az érintési pontok koordinátái: $P_1(3;4)$, $P_2(3;-4)$. A kör középpontja az origó. A 3 abszcisszájú pontokban rajzolt érintők normálvektorai: $(3;4)$, $(3;-4)$.

Az érintők egyenlete: $3x + 4y = 25$, $3x - 4y = 25$.

b) A hajlásszög megegyezik a normálvektorok hajlásszögével, tompaszög esetén a kiegészítőszögével: $\left|\overrightarrow{n_e}\right| = \left|\overrightarrow{n_f}\right| = 5$. A vektorok skaláris szorzata:

$$\overrightarrow{n_e} \cdot \overrightarrow{n_f} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) = 9 - 16 = -7, \quad \overrightarrow{n_e} \cdot \overrightarrow{n_f} = \left|\overrightarrow{n_e}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_f}\right| \cdot \cos\alpha, \quad \cos\alpha = -\frac{7}{25}.$$

(Az α az egyenesek iránytangensének ismeretében is meghatározható.)

$\alpha \approx 106{,}26^\circ \approx 1{,}85$ radián. Mivel ez tompaszög, azért az egyenesek hajlásszöge $\alpha_{e,f} \approx 73{,}74^\circ \approx 1{,}29$ radián.

3. *Mely valós számok teljesítik a*

$$\log_{4-5x}(4x^2 + 1 - 4x) + \log_{2x-1}(13x - 4 - 10x^2) = 4$$

egyenlőséget?

Megoldás. Figyelembe véve, hogy $4x^2 + 1 - 4x = (2x-1)^2$ és $13x - 4 - 10x^2 = (4-5x)(2x-1)$, az értelmezési tartomány a következőképpen alakul: $4 - 5x > 0$ és $4 - 5x \neq 1$ és $2x - 1 > 0$ és $2x - 1 \neq 1$, amiből $\frac{1}{2} < x < \frac{4}{5}$ és $x \neq \frac{3}{5}$.

A logaritmus azonosságainak felhasználásával, új változó, az $y = \log_{4-5x}(2x-1)$ bevezetésével és felismerve, hogy $\log_{4-5x}(2x-1) = \frac{1}{\log_{2x-1}(4-5x)}$ kapjuk a következő, másodfokúra vezethető egyenletet: $2y + \frac{1}{y} = 3$. Megoldásai: $y_1 = 1$ és $y_2 = \frac{1}{2}$.

Az elsőből: $\log_{4-5x}(2x-1) = 1$, azaz $2x - 1 = 4 - 5x$, amiből $x_1 = \frac{5}{7}$ adódik, és ez megoldás.

A másodikból $\log_{4-5x}(2x-1) = \frac{1}{2}$, azaz $2x - 1 = \sqrt{4-5x}$, amiből: $x_2 = \frac{3}{4}$ és $x_3 = -1$. Ez utóbbi nem megoldása sem a fenti, sem az eredeti egyenletnek.

Összegezve: az egyenlőséget két valós szám teljesíti. A megoldások: $\frac{3}{4}$ és $\frac{5}{7}$.

4. *Egy öttagú családban a szülők életkorának összege 80 év, közülük az apa az idősebb. Három fiuk életkora prímszám differenciájú számtani sorozat három egymást követő eleme, összegük 30. Hány évesek a család tagjai, ha az apa két évvel ezelőtt háromszor annyi idős volt, mint a legidősebb fiú, akinek a születésekor az anya 20 évesnél idősebb volt?*

Megoldás. Legyen az apa életkora x év. Az anya életkora így $80 - x$. Mivel a férj idősebb a feleségnél, $x \geq 41$. A feltétel alapján a fiúk életkora $10 - p$, 10, $10 + p$, ahol p prímszám.

Két évvel ezelőtt az apa $x-2$, legidősebb fia $8+p$ éves volt. Így $x-2=3(8+p)$, vagyis $x=26+3p$, azaz $26+3p \ge 41$. Ebből $p \ge 5$. Az anya és legidősebb fia életkorának különbsége: $(80-x)-(10+p) > 20$, amiből $x < 50-p$. Mivel $x=26+3p$, azért $26+3p<50-p$, azaz $p<6$. Ezek alapján $5 \le p < 6$, vagyis $p=5$.

Az apa 41, az anya 39 éves, a fiaik életkora: 5; 10; 15.

II. rész

5. *Egy dobozban nyolc, tapintásra teljesen egyforma golyó van. Egyikükre a* 3*, másik kettőre a* 2*, ötre pedig az* 1 *számot írták. Valaki a golyók közül hármat kivesz, majd összeadja a golyókról leolvasott számokat.*

a) Milyen eredményeket kaphat így?

b) Mennyi az egyes eredmények valószínűsége?

Megoldás. *a*) A lehetséges összegek: $3=1+1+1$; $4=1+1+2$; $5=1+1+3=1+2+2$; $6=1+2+3$; $7=2+2+3$.

b) Az összes golyóhármas száma $C_8^3=\binom{8}{3}=56$ (8 golyó közül 3-at kell sorrend nélkül kiválasztani).

A 3 összeg kedvező eseteinek száma $C_5^3=\binom{5}{3}=10$ (az 5 db 1-gyel jelölt golyó közül 3-at kell sorrend nélkül kiválasztani), így ennek a valószínűsége $P_3=\dfrac{C_5^3}{C_8^3}=\dfrac{10}{56}\approx 0{,}1786$.

A 4 összeghez 2 db 1-gyel jelölt mellé 1 db 2-vel jelöltet kell választani, a kedvező esetek száma $C_5^2\cdot C_2^1=\binom{5}{2}\cdot\binom{2}{1}=10\cdot 2=20$, ezért $P_4=\dfrac{20}{56}\approx 0{,}3571$.

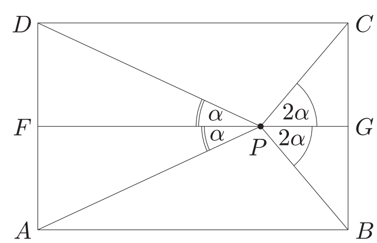
Az 5 összeget két különböző módon is megkaphatjuk, ezt láthattuk az *a*) kérdésre adott válasznál, ezért a kedvező esetek száma: $C_5^2\cdot C_1^1+C_5^1\cdot C_2^2=10\cdot 1+5\cdot 1=15$, vagyis $P_5=\dfrac{15}{56}\approx 0{,}2679$.

A 6 összegre: $C_5^1\cdot C_2^1\cdot C_1^1=5\cdot 2\cdot 1=10$, vagyis $P_6=\dfrac{10}{56}\approx 0{,}1786$.

A 7 összegre: $C_2^2\cdot C_1^1=1\cdot 1=1$, vagyis $P_7=\dfrac{1}{56}\approx 0{,}0179$.

6. *Egy téglalap két oldala* 6 cm *és* 4 cm *hosszú. Hol helyezkedik el a hosszabbik középvonalon az a P pont, amelyből az egyik* 4 cm *hosszú oldal kétszer akkora szögben látszik, mint a másik* 4 cm*-es oldal?*

Megoldás. A középvonal egyenese szimmetriatengely, ezért az *ábrán* az azonosan jelölt szögek egyenlők. Legyen $FP=x$, ekkor $PG=6-x$.



Az AFP derékszögű háromszögben $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2}{x}$, a BGP derékszögű háromszögben $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2}{6-x}$. A $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ azonosságba helyettesítsük be az előbbieket, és rendezzük az egyenletet:

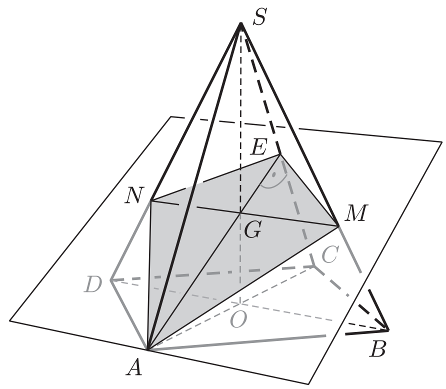
$$\frac{2}{6-x}=\frac{2\cdot\frac{2}{x}}{1-\left(\frac{2}{x}\right)^2},\quad \text{ahonnan}\quad 3x^2-12x-4=0,\quad x_1=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}\approx 4{,}309;\quad x_2<0.$$

Két adott tulajdonságú pont van a hosszabbik középvonalon, a középpontra szimmetrikusan, attól $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-1\approx 1{,}309$ egységnyire.

7. *Egy négyoldalú egyenes gúla alaplapja a oldalú négyzet és minden oldalélе* 30°*-os szöget zár be a gúla magasságával.*

Mekkora területű síkidomban metszi a gúlát egy olyan sík, amelyik átmegy a gúla alaplapjának egyik csúcsán és merőleges a szemközti oldalélre?

Megoldás. Tekintsük az $SABCD$ gúla A csúcsára illeszkedő, SC-re merőleges síkot. Ez SC-t E pontban, SB-t M-ben, SD-t N-ben, a gúla SO magasságát pedig G pontban metszi.



A sík merőlegessége miatt $AE \perp SC$, a gúla szimmetrikus voltából $NM \parallel DB$ következik. $ASO\sphericalangle = CSO\sphericalangle = 30^\circ$, $CSO\sphericalangle = EAC\sphericalangle$, mert merőleges szárú szögek, így $2AO = AS = SC = a\sqrt{2}$, az ACS háromszög szabályos, magassága az AE, és így $AE = a\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Az ACS szabályos háromszögben G magasságpont és súlypont is, tehát a G pont az SBD szabályos háromszögben súlypont lesz, harmadolja SO-t, így a párhuzamos szelők tétele miatt $MN = \dfrac{2}{3}DB = \dfrac{2}{3}a\sqrt{2}$.

Az $AMEN$ síknégyszög 2–2 szomszédos oldala egyenlő a gúla ACS síkra vonatkozó szimmetriája miatt, ezért e négyszög deltoid, területe az átlók szorzatának fele:

$$T = \frac{AE \cdot MN}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$

8. *A 2006-os május–júniusi érettségi vizsgán az emelt szintű írásbeli dolgozatok javításával kapcsolatban az összes vizsgatárgynál tett tanulói észrevételek (beadványok) megoszlását látjuk az alábbi* táblázatban.

Tantárgy	Beadványok száma	Írásbeli dolgozatok száma
Magyar nyelv és irodalom	1187	6251
Történelem	1660	11617
Matematika	657	6408
Biológia	855	5530
Fizika	149	1745
Angol nyelv	145	3956
Kémia	218	1814
Egyéb	614	8700
Összesen	5485	46021

a) Ábrázoljuk kördiagrammal a beadványok megoszlását.

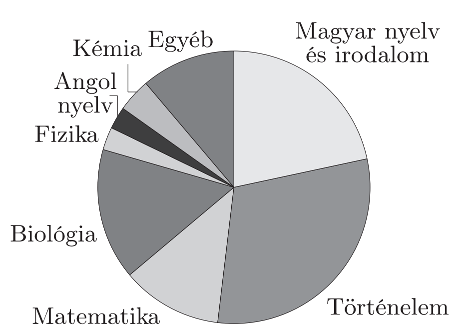
b) Mennyi a terjedelme a hét tantárgynál a beadványok, illetve az írásbeli dolgozatok számának?

c) Határozzuk meg a beadványok számának a szórását a hét tantárgy figyelembevételével.

d) Melyik tantárgynál „reklamáltak" leginkább az érettségizők?

e) Számítsuk ki a hét tantárgyhoz tartozó beadványok számának részarányát százalékban (vagyis a beadványok számát az írásbeli dolgozatok számához képest), majd határozzuk meg az összesített részaránytól való átlagos abszolút eltérést.

Megoldás. *a)*



b) A beadványok tantárgyankénti számának terjedelme: $1660 - 145 = 1515$.

Az írásbeli dolgozatok tantárgyankénti számának terjedelme: 11 617 − 1745 = 9872.

c) A beadványok számának szórása:

$$D_7(x) = \sqrt{\frac{Q}{7}} \approx 538,$$

ahol

$$Q = (1187 - \bar{a})^2 + (1660 - \bar{a})^2 + (657 - \bar{a})^2 + (855 - \bar{a})^2 + (149 - \bar{a})^2 + \\ + (145 - \bar{a})^2 + (218 - \bar{a})^2, \quad \text{ahol } \bar{a} \text{ a hét adat számtani közepe: } \bar{a} \approx 696.$$

d) Magyar nyelv és irodalomnál, itt a legnagyobb a részarány (18,99%).

e) Az összesített részarány az összes beadvány száma az összes dolgozat számához képest: 11,92. A százalékban kifejezett részarányok átlagos abszolút eltérése:

$$S_7(11{,}92) = \frac{b}{7} \approx 3{,}77, \qquad \text{ahol}$$

$$b = |18{,}99 - 11{,}92| + |14{,}29 - 11{,}92| + |10{,}25 - 11{,}92| + |15{,}46 - 11{,}92| + \\ + |8{,}54 - 11{,}92| + |3{,}67 - 11{,}92| + |12{,}02 - 11{,}92|.$$

9. *Az $y = ax^2 + bx + c$ parabola átmegy az origón, és az $E(3;6)$ pontjához húzott érintő meredeksége -4.*

a) *Írjuk fel a parabola egyenletét.*

b) *Adjuk meg a parabola fentebb megadott érintőjének egyenletét.*

c) *Milyen arányban osztja az $y = 2x$ egyenes a parabola és az x tengely által közrefogott síkidom területét?*

Megoldás. *a*) A parabola egyenlete: $y = ax^2 + bx + c$. $O(0;0)$ rajta van a parabolán, ezért $c = 0$. $E(3;6)$ is rajta van a parabolán, ezért $6 = 9a + 3b + c$, vagyis

$$2 = 3a + b. \tag{1}$$

Az érintő meredekségét a derivált adott helyen vett helyettesítési értéke adja meg: $y' = 2ax + b$. Mivel $m_E = -4$, azért

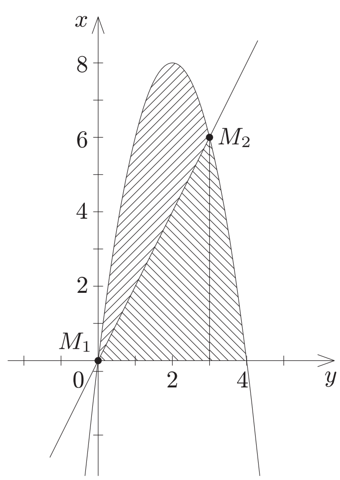
$$6a + b = -4. \tag{2}$$

Az (1), (2) egyenletrendszer megoldása: $a = -2$ és $b = 8$.

Így a szóban forgó parabola egyenlete: $y = -2x^2 + 8x$.

b) Az érintő átmegy az $E(3;6)$ ponton és a meredeksége $m = -4$, így az $y - y_0 = m(x - x_0)$ képlet alapján az egyenlete: $y = -4x + 18$.

c) Az $y = -2x^2 + 8x$ egyenletű parabola zérushelyeit szorzattá alakítással kapjuk: $x_1 = 0$ és $x_2 = 4$. Az $y = 2x$ egyenes az $y = -2x^2 + 8x$ egyenletű parabolát azokban a pontokban metszi, amelyek koordinátái az egyenleteikből alkotott egyenletrendszer megoldásai: $M_1(0;0)$ és $M_2(3;6)$.



A „középső” síkidom, a háromszög területe:

$$T_2 = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9.$$

A „felső” síkidom területe a parabola „alatti” terület és T_2 különbsége (Newton–Leibniz tétel alapján):

$$T_1 = \int_0^3 (-2x^2 + 8x)\, dx - 9 = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2\right]_0^3 - 9 = -18 + 36 - 9 = 9.$$

A „jobb oldali” síkidom területe a parabola „alatti” terület:

$$T_3 = \int_3^4 (-2x^2 + 8x)\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2\right]_3^4 = -\frac{128}{3} + 64 - (-18 + 36) = \frac{10}{3}.$$

A keresett arány:

$$\frac{T_1}{T_2 + T_3} = \frac{9}{9 + \frac{10}{3}} = \frac{27}{37}.$$