

I. rész

1. 20 tömegszázalékos konyhasóoldat (az oldószer víz) melegítése közben az oldószer 15 százaléka elpárolgott. Ha most az oldathoz 0,1 kg konyhasót adunk, akkor az oldat ugyanannyi tömegszázalékos lesz, mintha az eredeti oldathoz 0,1 kg oldószert és 0,3 kg konyhasót adtunk volna hozzá. Mekkora az eredeti oldat tömege? (11 pont)

2. Egy elektronikai gyárban gyártott gombelemek 3%-a hibás a tapasztalatok szerint. Mekkora a valószínűsége, hogy véletlenszerűen kiválasztott 8 db gombelem között

- a) nincs hibás?
b) legalább két hibás van? (12 pont)

3. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\cos^2 x \cdot (2 \cos^2 x + 1) = \frac{105}{128 \cos^4 x + 64 \cos^2 x - 64}. \quad (14 \text{ pont})$$

4. Sanyi lottózott (90 szám közül 5-öt kell bejelölni, és 5 számot húznak ki). Kiválasztott nyolc számot (a lehetséges 90-ből), és csak ezeket felhasználva megjátszotta az összes lehetséges számötöst.

- a) Hány X-et rajzolt összesen a szelvényekre?
b) A kiválasztott 8 számból 2-öt kihúztak. Hány kettes találat volt?
c) Hány hármas találat lett volna, ha a kiválasztott 8 számból 4-et kihúztak volna? (14 pont)

II. rész

5. Sík talajon áll három darab r sugarú gömb úgy, hogy páronként érintik egymást. Mekkora a mindhárom gömböt és az alapsíkot is érintő gömb és a négy gömbközéppont által meghatározott tetraéder térfogatának az aránya? (16 pont)

6. Tekintsük a következő $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt: $f(x) = |x^3 - 2x^2 - 8x| - 3$.

- a) Hol van a függvénynek szélsőértéke?
b) Írjuk fel a függvény érintőjének egyenletét az $x = 3$ abszcisszájú pontjában. (16 pont)

7. Valaki betesz a bankba 50 000 Ft-ot. Az első bank havi 0,4% kamatos kamatot fizetne egy éven keresztül, havonkénti tőkésítés mellett. A második bank havi 0,3% kamatos kamatot fizetne egy éven keresztül, havonkénti tőkésítés mellett, valamint minden negyedik hónap után megnöveli a bent lévő tőkeösszeget 0,5%-al. A harmadik bank fél évre 3% kamatot ad, félévenkénti tőkésítéssel.

a) Töltsük ki a következő táblázatot (1 tizedes jegyre kerekítve):

	Betét összege 1. hó vége	Betét összege 2. hó vége	Betét összege 3. hó vége	Betét összege 4. hó vége	Betét összege 5. hó vége	Betét összege 6. hó vége
Első bank						
Második bank						
Harmadik bank						
	Betét összege 7. hó vége	Betét összege 8. hó vége	Betét összege 9. hó vége	Betét összege 10. hó vége	Betét összege 11. hó vége	Betét összege 12. hó vége
Első bank						
Második bank						
Harmadik bank						

b) A táblázat alapján hány hónapra célszerű az első, illetve a második bankban elhelyezni a pénzünket? (16 pont)

8. Egy mentőrepülőgép súlyos sérültet szállítva az $A(50; 240)$ koordinátájú katonai támaszpont kórházába tartott (a koordináták km-ben értendők), de a nyílt tengeren műszaki hiba miatt kényszerleszállást kellett végrehajtania a $C(50; 20)$ koordinátájú pontban. A mentőszolgálat másik mentőrepülőgépe ekkor éppen az A támaszpont felé tartott, helyzete $D(160; 170)$ volt, 160 km-re elegendő üzemanyag állt rendelkezésére, és nem szállított sérültet. A kényszerleszállástól számítva minimum mennyi idő alatt lehet a sérültet a másik repülőgéppel az A támaszpont kórházába szállítani, ha tudjuk, hogy az A támaszponton, illetve $B(210; 190)$ koordinátájú kis szigeten van lehetőség üzemanyag felvételre, és a mentőrepülőgépek átlagsebessége 1000 km/h? Az üzemanyag felvétel (ha szükséges) és a sérült áthelyezése a másik gépre 10–10 percet vesz igénybe. (16 pont)

9. a) Igazmondó (aki mindig igazat mond), Hazudós (aki mindig hazudik) és Bizonytalan (akiről soha nem lehet tudni, hogy éppen hazudott-e vagy nem) versenyt futottak, és úgy értek célba, hogy nem volt holtverseny. Egy matematikus, aki látta a versenyfutást, de nem ismerte őket, a következő kérdéseket tette fel nekik a verseny végén:

Az elsőként beérkezőt megkérdezte: Ki lett a második? A válasz így hangzott: Igazmondó.

A másodikként beérkezőt megkérdezte: Te ki vagy? A válasz ez volt: Bizonytalan.

A harmadikként beérkezőt is megkérdezte: Ki ért be előtted? A válasz: Hazudós.

Milyen beérkezési sorrendet állapított meg ezek után a matematikus?

b) Válaszoljunk a következő kérdésekre (A , B , C halmazokat jelölnek):

Tudjuk, hogy $A \setminus B = C$. Igaz-e, hogy $B \cup C = A$?

Tudjuk, hogy $B \cup C = A$. Igaz-e, hogy $A \setminus B = C$?

(16 pont)