I. rész

1. *Aladár szerint a háromjegyű, Barnabás szerint pedig az ötjegyű számok közül választva lesz nagyobb a valószínűsége annak, hogy a kapott számban van 6-os számjegy. Melyiküknek van igaza?* (*11 pont*)

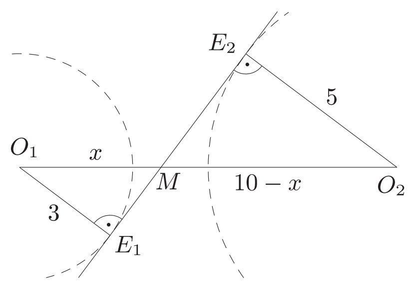
Megoldás. Könnyebb kiszámolni azt, hogy hány olyan szám van, amelyben nincs 6-os számjegy, aztán majd ezek számát kivonjuk az összes eset számából.

Az ötjegyűek között az első helyen nem lehet a 0 és a 6, a többi helyen pedig csak a 6 nem lehet. Tehát az esetek száma: $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 52\,488$. Olyan ötjegyű szám, amelyben van 6-os összesen $90\,000 - 52\,488 = 37\,512$ db van. Annak a valószínűsége, hogy 6-ost tartalmazó ötjegyű számot választunk: $\frac{37\,512}{90\,000} \approx 0{,}417$.

A háromjegyűek között olyan szám, amelyben nincs 6-os, $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ db van, így $900 - 648 = 252$ darabban van 6-os. Annak valószínűsége tehát, hogy 6-ost tartalmazó háromjegyű számot választunk: $\frac{252}{900} = 0{,}28$. Látható, hogy az ötjegyűek között nagyobb a valószínűsége a 6-ost tartalmazó szám kiválasztásának.

2. *Adott egy* 5 cm *és egy* 3 cm *sugarú kör. A körök középpontja* 10 cm*-re van egymástól. Milyen távol van a kisebbik kör középpontjától a két kör közös belső érintőinek metszéspontja?* (*12 pont*)

Megoldás. Ismeretes, hogy a belső érintők a középpontokat összekötő szakaszon metszik egymást.



A belső érintő megszerkesztésével két hasonló háromszög keletkezik, az O_1E_1M és az O_2E_2M.

A megfelelő oldalak arányából a következő egyenlethez jutunk: $\frac{10-x}{5} = \frac{x}{3}$ (x jelöli a kisebbik kör középpontjának és a belső érintők metszéspontjának a távolságát). A megoldás: $x = 3{,}75$ cm.

A kisebbik kör középpontjától 3,75 cm-re van a belső érintők metszéspontja.

3. *Milyen maradékot ad* $16^{101} + 8^{101} + 4^{101} + 2^{101} + 1$*, ha elosztjuk* $2^{100} + 1$*-gyel?* (*14 pont*)

Megoldás. Felhasználjuk a következőket: $a + b \mid a^{2k} - b^{2k}$ és $a + b \mid a^{2k+1} + b^{2k+1}$.

Ezek alapján:

$2^{100} + 1 \mid 2^{400} - 1$, amiből következik, hogy $2^{100} + 1 \mid 16^{101} - 16$.
$2^{100} + 1 \mid 2^{300} + 1$, amiből következik, hogy $2^{100} + 1 \mid 8^{101} + 8$.
$2^{100} + 1 \mid 2^{200} - 1$, amiből következik, hogy $2^{100} + 1 \mid 4^{101} - 4$.
$2^{100} + 1 \mid 2^{100} + 1$, amiből következik, hogy $2^{100} + 1 \mid 2^{101} + 2$.

Ezek felhasználásával a feladatban szereplő összeget alakítsuk a következő módon:

$$16^{101} + 8^{101} + 4^{101} + 2^{101} + 1 = (16^{101} - 16) + (8^{101} + 8) + (4^{101} - 4) + (2^{101} + 2) + 11.$$

A zárójelben lévő különbségek, illetve összegek oszthatók $(2^{100} + 1)$-gyel, ezért a maradék 11.

4. *a*) *Melyek azok az* $f(x)$ *lineáris függvények, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség:* $2f(x) + 3f(1-x) = 4x - 1$?
b) *Milyen előjelű lehet c, ha az* $ax^2 - bx + c$ *kifejezés minden x értékre pozitív?* (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Helyettesítsünk x helyére $(1 - x)$-et: $2f(1 - x) + 3f(x) = 3 - 4x$.

Így a következő egyenletrendszert kaptuk:

$$\left.\begin{aligned} 2f(x) + 3f(1-x) &= 4x - 1, \\ 2f(1-x) + 3f(x) &= 3 - 4x. \end{aligned}\right\}$$

Az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy $f(x) = -4x + \frac{11}{5}$. Erre a függvényre teljesülnek a feladat feltételei, így ez a megoldás.

b) A függvény értéke a 0 helyen c, így $c > 0$ szükséges. Ennél a feladat nem kérdez többet, így a válasz: c pozitív. Ez nyilván csak szükséges feltétel.

II. rész

5. *Adjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenlet összes megoldását a* $[0; 2\pi]$ *intervallumon*

$$3 \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0. \qquad (16\ pont)$$

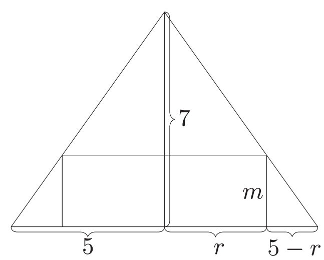
Megoldás. Az egyenlet értelmezési tartománya: $x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi$ és $x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi$, ahol k egész szám.

Vegyük észre, hogy $x + \frac{\pi}{3} = \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2}$. Legyen $y = x - \frac{\pi}{6}$, így a következő egyenlet írható: $3 \operatorname{tg}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{tg} y = 0$. Mivel $\operatorname{tg}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} y = -\frac{1}{\operatorname{tg} y}$, azért egyenletünk $-\frac{3}{\operatorname{tg} y} + \operatorname{tg} y = 0$ alakú lesz, amely ekvivalens a $\operatorname{tg}^2 y - 3 = 0$ egyenlettel.

Ennek megoldásaiból x-re a $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ és $\frac{11\pi}{6}$ értékeket kapjuk a megadott intervallumon.

6. *Legfeljebb milyen nagy térfogatú egyenes henger írható egy egyenes körkúpba, melynek alapköre* 5 *egység sugarú, magassága pedig* 7 *egység? (A henger és a kúp tengelye közös.)* (*16 pont*)

Megoldás. Az *ábra* az egyenes körkúp tengelymetszetét mutatja. A henger alapkörének sugarát jelölje r $(0 < r < 5)$, magasságát m. A hasonló háromszögekben: $\frac{5 - r}{m} = \frac{5}{7}$, innen a henger magassága: $m = 7 - \frac{7}{5} r$.



A henger térfogata: $V = r^2 \pi m$, vagyis

$$V(r) = r^2 \pi \left(7 - \frac{7}{5} r\right) = -\frac{7\pi}{5} r^3 + 7r^2\pi.$$

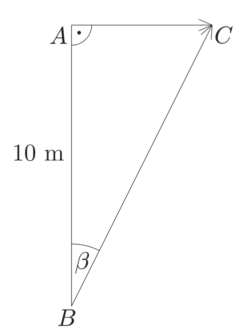
Deriválva: $V'(r) = -\frac{21\pi}{5} r^2 + 14r\pi$.

A $(0; 5)$ intervallumban ott lehet a $V(r)$ függvénynek szélsőértéke, ahol az első derivált 0. Az intervallum belsejében egyetlen zérushely van: $r = \frac{10}{3}$. Ellenőrizhető – például grafikusan –, hogy ezen a helyen a derivált előjelet vált. Mivel pozitívról vált negatívra, azért itt lokális maximuma van a függvénynek.

A maximális térfogatú henger magassága $\frac{7}{3}$, a térfogata pedig kb. 81,45.

7. *Elindul egy kocsi és* $2\ \mathrm{m/s^2}$ *gyorsulással halad egyenes úton. Erre az útra merőleges útról a mezőn átvágva* $5\ \mathrm{m/s}$ *egyenletes sebességgel egy ember szalad a kocsi felé. Hogyan válassza meg az indulási irányát, hogy fel tudjon ugrani a kocsira, ha az indulás pillanatában* 10 m*-re van a kocsitól? Mennyi idő múlva éri el a kocsit?* (*16 pont*)

Megoldás. A *rajzon* a kocsi elmozdulása: $\overrightarrow{AC}$, az ember elmozdulása: $\overrightarrow{BC}$, és $AB = 10$ méter.



Jelölje C azt a pontot, ahol az ember felugrik a kocsira. Ha t sec alatt jut B-ből C-be, akkor ez az út $5t$ (méterben mérve). A kocsi által megtett utat az $s = \frac{a}{2} t^2$ összefüggés alapján határozhatjuk meg (a a gyorsulás), így $AC = \frac{2t^2}{2} = t^2$.

Az ABC derékszögű háromszögben:

$$\sin\beta = \frac{AC}{BC} = \frac{t^2}{5t} = \frac{t}{5}, \quad \cos\beta = \frac{AB}{BC} = \frac{10}{5t} = \frac{2}{t}.$$

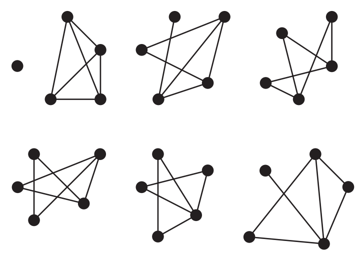
A megfelelő oldalakon álló kifejezéseket összeszorozva: $\sin\beta\cos\beta = \frac{2}{5}$, azaz $\sin 2\beta = \frac{4}{5}$. Innen $\beta = 26{,}57^\circ$ vagy $\beta = 63{,}43^\circ$. (Csak a hegyesszögű megoldásnak van értelme.)

Emberünk kétféle haladási irányt választhat. Ha az AB úthoz képest $26{,}57^\circ$-os szögben fut, akkor kb. 2,24 sec múlva ugorhat fel a kocsira, ha pedig $63{,}43^\circ$-os szögben indul, akkor kb. 4,47 sec múlva éri el a kocsit.

8. *a) Hány öt csúcsú, hat élű egyszerű gráf van, ha a csúcsokat megkülönböztetjük és hány, ha nem?*

b) Janó lerajzolta az összes öt csúcsú, hat élű gráfot úgy, hogy a csúcsokat megkülönböztette. Lackó épp arra járt és rábökött egy csúcsra. Mi a valószínűsége, hogy ez a csúcs éppen elsőfokú volt? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Ha a csúcsokat nem különböztetjük meg, hatféle gráfot tudunk rajzolni. A teljes 5 csúcsú gráf 10 élt tartalmaz. Közülük $\binom{10}{6}$-féleképpen lehet hatot kiválasztani, ez éppen 210, ennyi olyan ötcsúcsú, hatélű gráf van, ha a csúcsokat megkülönböztetjük.



b) Kétféle gráfban van elsőfokú csúcs, mindkettőből 60 db-ot rajzolt fel Janó. Mindegyikben 1 db elsőfokú csúcs van, tehát 120 elsőfokú csúcs van a $210 \cdot 5 = 1050$ db csúcs között. Így a valószínűség: $\frac{120}{1050} = \frac{4}{35}$.

9. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:*

$$\sqrt[3]{2x^2 - 8x} - \sqrt[3]{2x^2} = 2. \qquad (\textit{16 pont})$$

Megoldás. Ha $x \ge 0$, akkor $\sqrt[3]{2x^2 - 8x} - \sqrt[3]{2x^2} \le 0$, a nemnegatív számok körében nincs megoldása az egyenletnek. Legyen $x < 0$ és vezessük be a $t = -\frac{x}{2}$ új változót. Ekkor $t > 0$ és az egyenlet bal oldala

$$\sqrt[3]{8t^2 + 16t} - \sqrt[3]{8t^2} = 2\left(\sqrt[3]{t^2 + 2t} - \sqrt[3]{t^2}\right) < 2\left(\sqrt[3]{(t+1)^2} - \sqrt[3]{t^2}\right).$$

Az *ábra* az $f(t) = t^{\frac{2}{3}}$ függvény grafikonját mutatja a $t > 0$ halmazon. Látható, hogy a függvény megváltozása minden egységnyi hosszúságú intervallumon kisebb vagy egyenlő 1-nél (valójában az egyetlen $[0;1]$ intervallum kivételével határozott egyenlőtlenség teljesül), így $2\big(f(t+1) - f(t)\big) \le 2$. Az egyenlet bal oldala tehát minden valós x-re kisebb 2-nél, így nincs megoldása.